Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$g(x,y) \;=\; x^2 \,-\, y^3 \,+\, y \;=\; 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y = f(x)$ mit $y \geq 1$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus a) eine C^2–Funktion ist und berechnen Sie $f'(0)$ und $f''(0)$.

c) Führen Sie zwei Schritte der Fixpunktiteration aus (18.2.7) aus, um f in der Nähe von $x^0 = 0$ und $y^0 = 1$ zu approximieren:

$$y^{k+1} \;=\; y^k \;-\; \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x^0, y^0)\right)^{-1} g(x, y^k), \qquad k = 0, 1.$$

Aufgabe 14:

Durch die Relation

$$g(x,y) \;=\; x^4 \,-\, x^2 \,+\, y^2 \;=\; 0$$

ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben.

Bestimmen Sie die Symmetrien dieser Kurve, die singulären Punkte (Klassifikation) und die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente. Bestimmen Sie auch die Steigungen der Kurve in den singulären Punkten und skizzieren Sie die Kurve mittels MATLAB.

Aufgabe 15:

Durch die Relation

$$g(x,y) \;=\; x^3 \;+\; y^3 \;-\; 3\,x\,y \;=\; 0$$

ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben.

Zeigen Sie, dass diese Kurve symmetrisch zur Winkelhalbierenden $y = x$ liegt, klassifizieren Sie die singulären Punkte der Kurve und bestimmen Sie die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente. Zeigen Sie, dass die Kurve für große $|x|$, $|y|$ durch eine Gerade $y = \alpha x \,+\, \beta$ approximiert wird; genauer: bestimmen Sie α und β so, dass gilt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} |g(x, \alpha x \,+\, \beta)| \;<\; \infty.$$

Skizzieren Sie die Kurve mit Hilfe von MATLAB.

Aufgabe 16:

a) Gegeben sei die Fläche

$$4a^2(x^2 + y^2) - z^4 \;=\; 0$$

($a > 0$). Geben Sie für die Normalen dieser Fläche eine Parameterdarstellung an und zeigen Sie, dass die Projektion des Normalenabschnitts zwischen der Fläche und der (x, y)–Ebene auf die (x, y)–Ebene für alle Normalen die gleiche Länge hat.

b) Zeigen Sie, dass sich die Relation

$$g(x, y, z) \;:=\; z^3 \;-\; x\,z \;-\; y \;=\; 0$$

in einer Umgebung von $\boldsymbol{x}^{\,0} = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ lokal noch z auflösen lässt mit $z = u(x, y)$. Zeigen Sie weiter, dass u der folgenden partiellen Differentialgleichung genügt:

$$(3u^2 - x)^3\, u_{x\,y} \;+\; 3\,u^2 \;+\; x \;=\; 0.$$

Abgabetermine: 6. 12. – 10. 12. 2004 **vor** der Übung.

Achtung geänderter Anleitungstermin am 30.11.:

9.45 - 11.15 Uhr ES 38 (für ET, IIW)

17.30 - 19.00 Uhr Audimax I