9 Anwendungen der Integralrechnung

9.1 Rotationskörper

Betrachte einen Funktionsgraphen $y = f(x)$, der um die x–Achse rotiert:
Für die Querschnittsfläche gilt

$$Q(x) = \pi(f(x))^2$$

Damit ergibt sich die Volumenformel:

$$V_{rot} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die gleiche Querschnittsfläche, so sind ihre Volumina gleich.

Beispiel: Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$$

um die x–Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{rot} &= \pi \int_{-a}^{a} \left[b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 \quad dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) dx \\ &= \frac{4}{3}\pi a b^2 \end{aligned}$$

Volumen einer Kugel: Für $a = b = r$ ergibt sich

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^2$$

Oberfläche eines Rotationskörpers:

$$O_{rot} = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

Beispiel:

Für die Oberfläche einer Kugel gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{Kugel} = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi r \int\limits_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2$$

9.2 Kurven und Bogenlänge

Definition:

1) Eine stetige Funktion $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt eine **Kurve** im $\mathbb{R}^n$ (auch **Parameterdarstellung einer Kurve**).
   $c(a)$ heißt der Anfangspunkt, $c(b)$ der Endpunkt der Kurve c.
   Eine Kurve heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$.

2) Ist die Abbildung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1–Abbildung, d.h., ist jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ von $c = (c_1, \ldots, c_n)$ stetig differenzierbar, so heißt $c(t)$ eine **C^1–Kurve**.
   $c(t)$ heißt **stückweise C^1–Kurve**, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ gibt, sodass $c(t)$ auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine C^1–Funktion ist.

3) Eine C^1–Kurve c heißt **glatt**, falls

$$\forall\, t \in [a, b] \quad \dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t))^T \neq 0.$$

Beispiele:

1) Die Kurve

$$c(t) := (\cos t, \sin t)^T \qquad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt einen **Kreis** im $\mathbb{R}^2$.

2) Die Kurve

$$c(t) = (rt - a\sin t, r - a\cos t)$$

beschreibt eine **Zykloide**.
Wegen

$$\dot{c}(t) = (r - a\cos t, a\sin t)^T$$

ist die Kurve im Fall $r = a$ an den Stellen $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt!

Beispiele:

3) Die Kurve

$$c(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t), ht)^T \qquad t \in \mathbb{R}$$

beschreibt eine **Schraubenlinie** mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe h.

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die neue Kurve

$$\tilde{c}(\tau) = c(h(\tau)), \quad \alpha \le \tau \le \beta$$

die gleiche Gestalt und gleichen Durchlaufsinn wie die Kurve c:

Parameterwechsel oder **Umparametrisierung**

Bemerkung:

1) Kurven, die durch Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.

2) Im Fall einer C^1–Kurve werden entsprechend nur C^1–Parameterwechsel zugelassen.

3) Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ läßt sich als eine Kurve auffassen:

$$c(t) := (x, f(x))^T \qquad a \leq x \leq b$$

beziwehungsweise

$$c(t) := (a + t(b-a), f(a + t(b-a)))^T \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Bogenlänge einer Kurve

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$:

$$L(Z) := \sum_{j=1}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

ist eine **untere Schranke** für die Bogenlänge der Kurve $c(t)$.

Definition: Ist die Menge $\{L(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c **rektifizierbar**, und

$$L(c) := \sup\{L(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \to 0} L(Z)\}$$

ist die **Länge der Kurve** c.

Satz: Jede C^1–Kurve ist rektifizierbar und es gilt:

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beweisidee: Zunächst gilt die Darstellung

$$L(Z) = \sum_{j=1}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, sodass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = \dot{c}_k(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j)$$

Daraus folgt

$$L(Z) = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{c}_k(\tau_{k_j}))^2} (t_{j+1} - t_j) \right)$$

Bogenlänge approximiert durch **Riemansche Summe**:

$$R(Z) = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{c}_k(t_j))^2} (t_{j+1} - t_j) \right)$$

Zeigen nun mit Hilfe gleichmäßiger Stetigkeit von c, dass für $\|Z\| \to 0$ gilt:

$$|L(Z) - R(Z)| \to 0$$

Weiter gilt:

$$R(Z) = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{c}_k(t_j))^2}}_{\|\dot{c}(t)\|} \underbrace{(t_{j+1} - t_j)}_{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \quad L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beispiel: Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (r(1 - \cos t), r \sin t))^T \\ \|\dot{c}(t)\| &= r\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2r \sin \frac{t}{2} \\ L(c) &= 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = 8r \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1–Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung:

$$L(c \circ h) = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\| \, d\tau = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))\| h'(\tau) \, d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt = L(c)$$