Rechenregeln für Fourier–Reihen:
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}, \qquad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

1) **Linearität**

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\gamma_k + \beta\delta_k) e^{ik\omega t}$$

2) **Konjugation**

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{-k} e^{ik\omega t}$$

3) **Zeitumkehr**

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen: (Fortsetzung)

4) **Streckung**

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t}$$

5) **Verschiebung**

$$f(t+a) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k e^{ik\omega a}\right) e^{ik\omega t}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen: (Fortsetzung)

6) **Ableitung**
   Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt:

$$\begin{aligned} f'(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k) e^{ik\omega t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \omega k \Big(b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t) \Big) \end{aligned}$$

7) **Integration**
   Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t)dt = 0$, so folgt:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \sim -\frac{1}{T} \int_0^T t f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) \right)$$

Satz: (Konvergenzsatz)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodisch, stückweise stetig differenzierbar.
Betrachte die zugehörige Fourier–Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \Big)$$

1) Die Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

2) In allen kompakten Intervallen $[a,b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

3) In allen Unstetigkeitsstellen überschwingen die Partialsummen

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\Big)$$

für große n den Sprung um ca. 18 % (**Gibbs Phänomen**).

Bemerkung:
Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier–Reihe nicht aus.

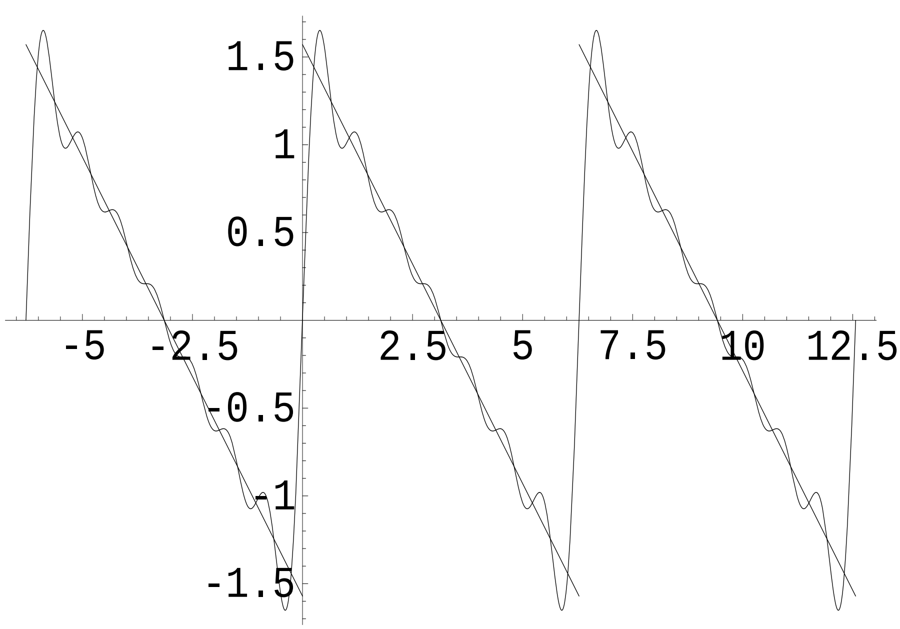

Bild: Sägezahnfunktion mit $S_7(t)$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Es gilt:

$$1 + 2\cos t + \ldots + 2\cos(nt) = \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}\, dt = (t - \pi) + 2\sin t + 2\frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + 2\frac{\sin(nt)}{n}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} R_n(t) \quad &= \quad \int_{\pi}^{t} \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{2\sin(t/2)}\, dt \\ &\overset{\text{p.I.}}{=} \quad \frac{-\cos\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1} \int_{\pi}^{t} \cos\left((n + \frac{1}{2})\tau\right) \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin(\tau/2)}\right) d\tau \\ &\overset{\text{MWS}}{=} \quad \frac{-\cos\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{\cos\left[(n + \frac{1}{2})\bar{t}\right]}{(2n+1)} \left(\frac{1}{\sin(t/2)} - 1\right) \end{aligned}$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1)\sin(t/2)}$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \to 0 \qquad t \to \infty$$

Satz: **(Approximationsgüte)**

1) **Approximation im quadratischen Mittel**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T–periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \Big)$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier–Reihen.
Für den Teilraum von $C(\mathbb{R})$ der trigonometrischen Polynome

$$T_n := \text{Spann} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \sin(n\omega t) \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) \, dt$$

Satz: (Fortsetzung)

1) gilt dann

$$\forall \, \phi \in T_n \ : \ \|f - S_n\| \le \|f - \phi\|$$

d.h. $S_n(t)$ ist von allen Funktionen aus dem Teilraum T_n die beste Approximation von $f(t)$ im quadratischen Mittel.

2) Es gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(|a_k|^2 + |b_k|^2 \Big) = 2 \sum_{k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 \le \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

Hieraus folgt insbesondere die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

Satz: (Fortsetzung)

2) und damit auch (**Riemannsches Lemma**)

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} |b_k| = 0$$

Bemerkung:
Unter geeigneten Bedingungen an $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ lassen sich die Koeffizienten γ_k der Fourier–Reihe abschätzen:

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{k^{m+1}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Beispiel: Rechteckschwingung

$$F_f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right)$$

Die Koeffizienten γ_k konvergieren mit $1/k$ gegen Null!

Bemerkung: Für $n \to \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, i.e.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt$$

Diese Beziehung nennt man die **Parsevalsche Gleichung**.
Beispiel: Wieder Rechteckschwingung
Es gilt

$$\frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt = 2$$

und da $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2$$