Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (SS 2002)

Kapitel 10: Periodische Funktionen, Fourier–Reihen

10.1 Grundlegende Begriffe

Periodische Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) heißt **periodisch mit der Periode** T, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t+T) = f(t).$$

Hauptresultat dieses Kapitels:
Entwicklung einer periodischen Funktion in eine **Fourier–Reihe**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t),\ \sin(\omega t)$
Oberschwingungen: $\cos(k\omega t),\ \sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

Bemerkungen:

1) Ist T eine Periode von $f(t)$, so auch kT, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
   Sind T_1 und T_2 Perioden, so ist auch $k_1T_1 + k_2T_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
   Man sagt: Die Menge aller Perioden bildet einen $\mathbb{Z}$–Modul.
2) Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$, so ist die Menge der Perioden gegeben durch kT, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion besitzt eine solche kleinste Periode.
3) Sind $f(t)$ und $g(t)$ T–periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$ T–periodisch.
4) Ist $f(t)$ T–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt für beliebige $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

Definition: Eine Funktion $g(t)$, $t \in [0, T]$ bzw. $t \in [0, T/2]$ läßt sich zu einer T–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Gebräuchlich sind dabei die folgenden Vorgehensweisen:

1) **Direkte Fortsetzung:**

$$f(t) := g(t - kT), \quad kT \le t < (k+1)T$$

2) **Gerade Fortsetzung:** Sei $g(t)$ auf $[0, T/2]$ gegeben:

$$f(t) := g(t - kT), \quad \left(\frac{2k-1}{2}\right) T \le t < \left(\frac{2k+1}{2}\right) T$$

   wobei g zunächst an der y–Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad -\frac{T}{2} \le t < 0$$

3) **Ungerade Fortsetzung:** Wie bei 2), aber Spiegelung am Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad -\frac{T}{2} \le t < 0$$

Definition:

1) Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ heißt **Fourier–Reihe** (oder **trigonometrische Reihe**); dabei sei $\omega = \dfrac{2\pi}{T} > 0$.

2) Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißen **trigonometrische Polynome**.

Komplexe Schreibweise der Fourier–Reihe:

Formel von Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right). \end{aligned}$$

Trigonometrische Polynome:

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Fourier–Reihe:

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Umrechnung der Koeffizienten a_k, b_k und γ_k:

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2} \left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t} \right) + \frac{b_k}{2i} \left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t} \right) \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right] \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{array}{lll}
\gamma_0 = \frac{1}{2} a_0 & \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \\
a_0 = 2\gamma_0 & a_k = \gamma_k + \gamma_{-k} & b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).
\end{array}$$

Satz:

1) Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) \, dt.$$

2) Konvergiert die Fourier–Reihe

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ **gleichmäßig** gegen eine Funktion $f(t)$, so ist diese stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} \, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung:

1) Reelle Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq l \\ T/2 & : \quad k = l \neq 0 \\ T & : \quad k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(l\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq l \\ T/2 & : \quad k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(l\omega t)\,dt = 0$$

Bemerkung:

2) Reelle Fourier–Koeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt, \quad k > 0$$

10.2 Fourier–Reihen

Definition:

1) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ in $[a, b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von $f(t)$ und $f'(t)$ existieren.

Definition: (Fortsetzung)

2) Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ werden die **Fourier–Koeffizienten von** $f(t)$ definiert durch:

$$\gamma_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt, k \in \mathbb{Z}$$

$$a_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad k \geq 0$$

$$b_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt, \quad k > 0$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

Definition: (Fortsetzung)

3) Die mit den obigen Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die **Fourier–Reihe** von $f(t)$.

Bei der Definition verwendet man die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ zu einer T–periodischen Funktion.

Satz: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T–periodische Funktion.

$$f(t) \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \wedge \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad a_k = 0 \quad \wedge \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion:

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt (beachte $\omega = 1$):

$$a_k = 0 \quad \wedge \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \sin(kt)\, dt = \frac{1}{k}.$$

Damit lautet die Fourier–Reihe:

$$S(t) \sim \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots.$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung:

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \quad t = 0, t = \pi, t = 2\pi \\ 1 & : \quad 0 < t < \pi \\ -1 & : \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin(kt)\, dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & : \quad k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier–Reihe lautet daher:

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$$

Beispiel: Sei $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit 2π–periodischer Fortsetzung.

Die Funktion ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\,dt = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{3} & : \quad k = 0 \\ (-1)^k \dfrac{4}{k^2} & : \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Damit ergibt sich als Fourier–Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\cos t}{1^2} + \frac{4\cos(2t)}{2^2} - + \ldots$$