Analysis II für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (SS 2002)

Satz: (Konvergenzkriterien)

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

1) Das uneigentliche Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;:\; \exists\,C > a \;:\; \forall\,z_1, z_2 > C \;:\; \left|\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

2) Ist das uneigentliche Integral absolut konvergent, d.h. das uneigentliche Integral $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergiert, so konvergiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Satz: (Konvergenzkriterien)

3) **Majorantenkriterium**

$$\forall\, x \;:\; |f(x)| \leq g(x) \;\wedge\; \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{absolut konvergent}$$

4) Weiter gilt folgende Umkehrung:

$$\forall\, x \;:\; 0 \leq g(x) \leq f(x) \;\wedge\; \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{divergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{divergent}$$

Beispiele:

1) Das sogenannte **Dirichlet–Integral**

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

ist konvergent:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\cos t}{t}\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

und damit

$$\left| \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| \leq \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{2}{z_1} \to 0 \quad (z_1 \to \infty)$$

Das Dirichlet–Integral besitzt den Wert $\pi/2$.

Beispiele:

2) Das **Exponentialintegral**

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \qquad (x < 0)$$

ist für alle $x < 0$ absolut konvergent.

3) Die **Gamma–Funktion** $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Die Gamma–Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

8.6 Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Gamma–Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Zunächst: Parameterabhängige eigentliche Integrale

Sei $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, sodass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a,b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy.$$

Fragen:

1) Ist die Funktion $F(x)$ **stetig**, wenn $f(x,y)$ stetig ist?
2) Ist die Funktion $F(x)$ **differenzierbar**, wenn $f(x,y)$ nach der Variablen x differenzierbar ist?

Satz: (Stetigkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist $f(x,y)$ stetig auf $I \times [a,b]$, so existiert das Integral

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy$$

für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist stetig auf I.

Satz: (Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist $f(x,y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch $F(x)$ auf dem Intervall stetig differenzierbar (mit eventuell einseitigen Ableitungen an den Rändern von I), und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Beispiel:

1)

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\,dt$$

2) Die **Bessel–Funktion**:

$$J_n(x) \quad := \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$J_n'(x) \quad = \quad -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cdot \sin(x\sin t - nt)\,dt$$

Die Bessel–Funktion $J_n(x)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Parameterabhängige **uneigentliche** Integrale:

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

Beispiel: Wieder die Gamma–Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

Definition:

Das Integral $\int_a^\infty f(x,y)\,dy$, $x \in I$ heißt **gleichmäßig konvergent**, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > a$ gibt, sodass gilt:

$$\forall\, x \in I \;:\; \forall\, y_1, y_2 \geq C \;:\; \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) \right| dy < \varepsilon.$$

Bemerkung: Majorantenkriterium:

$$\forall\, x \in I \quad : \quad |f(x,y)| \leq g(y) \;\wedge\; \int_a^\infty g(y)\,dy \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^\infty f(x,y)\,dy, \quad x \in I \quad \text{gleichmäßig konvergent.}$$

Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

konvergiert gleichmäßig (und absolut), falls $f(x,y)$ eine gleichmäßige Majorante besitzt.

Satz: Ist $f(x,y)$ stetig, nach x stetig (partiell) differenzierbar und sind die Integrale

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

auf kompakten Teilmengen von I gleichmäßg konvergent, so ist auch $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen:

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Beispiel:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} \cdot \ln t\,dt$$