Analysis II für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (SS 2002)

Kapitel 8: Integration

8.1 Das bestimmte Integral

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine **beschränkte** Funktion auf einem (zunächst) kompakten Intervall $[a,b]$.

Definition: 1) Eine Menge der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung (Partition, Unterteilung)** des Intervalls $[a,b]$.
Die **Feinheit** der Zerlegung ist dabei

$$\|Z\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

Man bezeichnet mit **Z** bzw. $\mathbf{Z}[a,b]$ die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$.

Definition: 2) Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1})$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** zur Zerlegung Z,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Obersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z.

Beobachtung:

Aus den Definitionen folgt direkt:

1) Für **feste** Zerlegungen gilt stets:

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z).$$

2) Ist Z_1 eine **feinere** Zerlegung als Z_2, i.e. $Z_2 \subset Z_1$, so gilt:

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \qquad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2).$$

3) Für zwei **beliebige** Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher:

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1).$$

Konsequenzen:

1) Es existieren die Grenzwerte über immer feinere Zerlegungen:

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx \quad := \quad \sup\{U_f(Z) \ : \ Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \textbf{(Unterintegral)}$$

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx \quad := \quad \inf\{O_f(Z) \ : \ Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \textbf{(Oberintegral)}$$

2) Eine Funktion $f(x)$ heißt **(Riemann–) integrierbar** über $[a,b]$, falls Unter– und Oberintegral übereinstimmen:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

nennt man das **(Riemann–) Integral von** $f(x)$ **über** $[a,b]$.

Beispiele: 1) Die konstante Funktion $f(x) = c$ **ist integrierbar**:

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1}-x_i) = c\,(b-a) \ \Rightarrow \ \int_a^b f(x)dx = c\,(b-a).$$

2) Sei $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$ und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$:

$$U_f(Z_n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 f(x)dx \quad = \quad \frac{1}{2}.$$

Beispiele:

3) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung: $U_f(Z) = 0,\ O_f(Z) = 1.$

Also ist die Funktion **nicht** integrierbar.

4) Sei $a \leq c \leq b$ und $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \neq c \\ 1 & : \quad x = c \end{cases} .$$

Die Funktion ist integrierbar mit $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, denn

$$U_f(Z) = 0 \qquad 0 < O_f(Z) < 2\|Z\|.$$

Satz: Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar auf $[a,b]$. Dann gelten:

1) f integrierbar auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall c \in [a,b]:$ f integrierbar auf $[a,c]$ und $[c,b]$.
Zusätzlich gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx.$$

2) **Linearität**: Auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ist integrierbar:

$$\int\limits_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$$

3) **Positivität**:

$$\forall\, x \in [a,b]\ :\ f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Satz: (Fortsetzung)

4) **Abschätzungen**:

$$(b-a)\cdot\inf(f[a,b]) \quad\leq\quad \int_a^b f(x)dx \;\leq\; (b-a)\cdot\sup(f[a,b])$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \quad\leq\quad (b-a)\cdot\sup\{|f(x)|\,:\,a\leq x\leq b\}$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \quad\leq\quad \int_a^b |f(x)|dx$$

Bei der letzten Abschätzung muß $|f(x)|$ integrierbar sein.

Bemerkungen:

1) Die erste Aussage gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c.
Man definiert daher

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

sowie

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2) Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt stets

$$R_f(Z_m) \rightarrow \int_a^b f(x)dx$$

sofern $\|Z_m\| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

8.2 Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (Riemannsches Kriterium)
Für eine **beschränkte** Funktion $f(x), a \leq x \leq b$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) $f(x)$ ist integrierbar über $[a, b]$.
2) $\forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, Z \in \mathbf{Z}[a, b] \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Satz:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:

1) Ist $f(x)$ **monoton**, so ist $f(x)$ integrierbar.

2) Ist $f(x)$ **stetig**, so ist $f(x)$ integrierbar.

Beweis zu 2):
Die Funktion ist stetig auf $[a, b]$, also auch gleichmäßig stetig, da $[a, b]$ kompakt.
Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ passend, so dass

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Dann gilt für eine Zerlegung Z mit $\|Z\| < \delta$:

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}] \Big)(x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{b - a} \right) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon \end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Kriterium ist damit $f(x)$ integrierbar.

Satz: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gelten:

1) Das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ ist integrierbar.
2) Gilt $g(x) \geq C > 0$, so ist der Quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ integrierbar.
3) Die folgenden Funktionen sind integrierbar:

$$|f|(x) := |f(x)|$$

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & : \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & : \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) := \begin{cases} 0 & : \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & : \quad f(x) < 0 \end{cases} .$$

Beweis zu 1): Rückführung auf Riemannsches Kriterium:
Sei $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ eine feste Zerlegung. Dann gilt:

$$O_{f\cdot g} - U_{f\cdot g} = \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sup(f\cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f\cdot g)[x_j, x_{j+1}] \Big)(x_{j+1} - x_j).$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &= \sup_{x,y} |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{x,y} |g(x) - g(y)| + \|g\|_\infty \sup_{x,y} |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$O_{f\cdot g} - U_{f\cdot g} \leq \|f\|_\infty \cdot (O_g - U_g) + \|g\|_\infty \cdot (O_f - U_f).$$

Frage: Stetige Funktionen sind integrierbar. Was ist mit

Funktionen mit Unstetigkeitstellen?

Insbesondere: **stückweise stetige Funktionen**

Satz: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann (Riemann)–integrierbar, falls die Menge $\mathrm{Unst}(f)$ ihrer Unstetigkeitsstellen eine so genannte **Lebesgue–Nullmenge** ist, d.h., falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, [a_i, b_i]_{i\in\mathbb{N}} \;:$$

$$\mathrm{Unst}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$$

8.3 Hauptsatz und Anwendungen

Definition:

Gegeben seien Funktionen $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist $F(x)$ differenzierbar auf $[a, b]$, und gilt: $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$, so heißt

$F(x)$ eine **Stammfunktion** von $f(x)$.

Bemerkung:

1) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind auch alle Funktionen der Form

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

2) Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion $F_1(x) - F_2(x)$ konstant.

Satz: (Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

2) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Beweis: Teil 1): Wir müssen zeigen, dass

$$F'(x) = f(x).$$

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x+h \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \\
&\leq \sup\{\, |f(t) - f(x)| \,:\, |t-x| \leq h \wedge t \in [a,b]\} \\
&\to 0 \qquad (h \to 0),
\end{aligned}$$

da die Funktion $f(x)$ stetig ist.

Beweis: Teil 2): Nach der Bemerkung und Teil 1) gilt

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C \qquad (C = \text{ Konstante}).$$

Daraus folgt

$$F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt + C, \qquad F(a) = \underbrace{\int\limits_a^a f(t)dt}_{=0} + C$$

und wir erhalten

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

Bemerkungen:

1) Teil 1) des Hauptsatzes gilt auch für stückweise stetige Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur

einseitig differenzierbar

und

$$F'(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t) \qquad F'(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t).$$

2) Eine beliebige Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man auch

das unbestimmte Integral

von $f(x)$ und schreibt

$$F = \int f(x)dx.$$

Die Funktion F ist dann nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Beispiele: Wir bezeichnen mit C stets die **Integrationskonstante**:

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \qquad (n\neq -1)\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x|+C \qquad (x\neq 0)\\
\int \sin x\,dx &= -\cos x+C\\
\int \cos x\,dx &= \sin x+C\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x+C\\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.
\end{aligned}$$