Grundlegende Bemerkungen zu exp, sin, cos usw.

a) **exp und ihre Abkömmlinge**
Die reelle e-Funktion und ihre Ableitung und die daraus folgenden Eigenschaften haben wir bisher benutzt, ohne die e-Funktion für beliebige reelle Argumente korrekt eingeführt zu haben. Von der Exponential-Funktion exp(x) haben wir zwar erwähnt, aber nicht gezeigt, daß sie als differenzerbare Funktion durch ihre Funktionalgleichung zusammen mit einer Normierung

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad f'(0) = 1 \tag{1}$$

eindeutig festgelegt ist. Das wollen wir hier nachholen.
Den Zusammenhang mit der Potenzfunktion e^x, und damit die Namensgebung, erläutern wir später.

Aus (1) folgt für $x = 0$, $y = 0$: $\quad f(0) = f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0 \wedge f(0) = 1$, und

weiter: Hätte f Nullstelle $f(z) = 0$, so wäre $f \equiv 0$ wegen$f(z+y) = 0\, f(y)\ \forall y \in \mathbb{R}$.
Man setzt also $f(0) = 1$, woraus folgt, daß f für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist .

Mit der Differenzierbarkeitsforderung und der Normierung $f'(0) = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x+0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(x)f(y) - f(x)(0)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} f(x) = f'(0)f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir nennen $fx) = \exp(x)$ die Exponentialfunktion (Namenserklärung im nächsten Abschnitt). Wegen $\frac{d}{x}\exp(x) = \exp(x)$ ist ihre Taylorreihe, also auch die zugehörige Potenzreihenentwicklung bekannt. Weitere Eigenschaften werden noch behandelt und aus der Potenzreihendarstellung abgeleitet.

b) **sin, cos usw.**
Diese trigonometrischen Funktionen (und die mit ihrer Hilfe definierten Funktionen) können wie in der Schule als reellwertige Funktionen über Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck definiert werden. Damit kann man auch die bekannten Beziehungen (Additionstheoreme, spezielle Werte, usw.) herleiten, inclusive der Ableitungsregeln. Und wieder erhält man mit Hilfe der Taylorentwicklung die zugehörigen Potenzreihen.

Die Erweiterung dieser Funktionen als komplexwertige Funktionen geschieht dann über ihre Definition als Potenzreihe mit komplexen Argumenten.