Abel'scher Grenzwertsatz

Hat die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den endlichen, positiven Konvergenzradius r und ist sie noch für $x = r$ konvergent, so ist die in $-1 < x \leq r$ definierte Funktion in r noch linksseitig stetig, also

$$\lim_{x \to r-0} f(x) = \lim_{x \to r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

Beweis:
Sei ohne Einschränkung $r = 1$, denn hat $\sum a_n x^n$ den Konvergenzradius r, so hat für $a'_n = a_n r^n$ die Reihe $\sum a'_n x^n$ den Radius 1 und $\sum a'_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum a_n r^n$ konvergiert.

Sei also $r = 1$ und $S := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent . Dann zeigen wir

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

Vorbetrachtung: Für das Produkt zweier Konvergenzreihen $f(x) = \sum a_n x^n$ mit $r_f = 1$ und $g(x) = \sum b_n x^n$ mit $r_g = 1$ gilt das Cauchyprodukt (Buch Satz 11.2.13)

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)\, x^n$$

Setzt man $g(x) := \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (geom. Reihe, $|x| < 1$) so folgt

$$\frac{1}{1-x} \cdot f(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_j}_{s_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

oder

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \tag{$*$}$$

Nun zum Beweis des Satzes:
Unter Verwendung von $(*)$ folgt für $|x| < 1$

$$S - f(x) = S - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Unter Verwendung der geometrischen Reihe gilt

$$(1-x)\frac{S}{(1-x)} = (1-x)S\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} Sx^n,$$

also

$$S - f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(S-s_n)}_{r_n} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n, \qquad r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j. \qquad (**)$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} a_n$

$$\exists\ m \in N\colon |r_n| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_n\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n > m$$

Dann folgt für $0 < x < 1$ aus $(**)$

$$\begin{aligned} |S - f(x)| &< (1-x)\sum_{n=0}^{m} |r_n| x^n + (1-x)\frac{\epsilon}{2}\underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} x^n}_{<\frac{1}{1-x}} \\ &< (1-x)\sum_{n=0}^{m} |r_n| + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Da $\sum\limits_{n=0}^{m} |r_n|$ einen festen Wert hat, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|1-x| < \delta \implies (1-x)\sum_{n=0}^{m} |r_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Insgesamt also:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon |1-x| < \delta \implies |S - f(x)| < \epsilon$$

und dies ist die Stetigkeitsaussage.