Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2000**
Prof. Dr. C. Geiger
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = e^{\sin x}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Man berechne das Taylor-Polynom 4. Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Man zeichne f und das in a) berechnete Taylor-Polynom.

c) Man schätze den bei der Approximation von f durch das Taylor-Polynom gemachten Fehler im Punkt $x = \frac{1}{2}$ ab.

d) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von f bis zum Glied mit x^4 und zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ unter Verwendung der bekannten Potenzreihenentwicklungen von exp und sin.

Aufgabe 10:

Fällt ein Körper der Masse m in einer Flüssigkeit unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung g, so kann der nach der Zeit t zurückgelegte Weg durch

$$s(t) \;=\; \frac{m}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{k \cdot g}{m}} \cdot t\right)\right) \qquad (t \geq 0)$$

beschrieben werden, dabei ist k eine vom Körper und von der Viskosität der Flüssigkeit abhängige Konstante.

a) Man berechne die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ des Körpers und bestätige damit die Gültigkeit der Differentialgleichung

$$ms''(t) \;+\; k(s'(t))^2 \;-\; mg = 0 \qquad (t \geq 0)\,.$$

b) Man ermittle die Grenzwerte $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$.

c) Für verschwindende Reibung ($k \to 0$) berechne man die Grenzwerte

$$\lim_{k\to 0} s(t)\,, \quad \lim_{k\to 0} v(t) \quad \text{und} \quad \lim_{k\to 0} a(t)\,.$$

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Gleichung

$$x = 6 - 3\sqrt[3]{x} \quad \text{für} \quad x \geq 0\,.$$

a) Man verschaffe sich graphisch durch Zeichnen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = 6 - 3\sqrt[3]{x}$ einen Überblick über die Anzahl der Schnittpunkte von f und g und begründe anschließend auch theoretisch, warum es nur eine Lösung x^* der obigen Gleichung geben kann.

b) Man gebe ein Intervall D an, so dass die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = 6 - 3\sqrt[3]{x_n}$$

für alle Startwerte aus D gegen x^* konvergiert.

c) Wieviele Iterationen N benötigt man ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$, um den Fixpunkt x^* mit einem absoluten Fehler von höchstens 10^{-3} zu berechnen?

d) Man berechne für das unter c) a priori bestimmte N die Iterierte x_N und überprüfe die Genauigkeit der Iterierten mit Hilfe der A-posteriori-Fehlerabschätzung.

Aufgabe 12:

Man bestimme das Interpolationspolynom p niedrigsten Grades, das durch die Daten

$$p(0) = -1\,, \quad p(1) = -2\,, \quad p(2) = 7\,, \quad p(i) = 2 \quad \text{und} \quad p(-i) = 2$$

gegeben ist.

Abgabetermin: 8.5, 9.5, 11.5 oder 12.5.00 vor der Übung