Institut für Angewandte Mathematik **WiSe 1999/2000**
Prof. Dr. C. Geiger
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Zusatzaufgaben

Aufgabe 1:

Man weise folgende Aussagen als Tautologien nach:

a) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$,

b) $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$,

c) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Aufgabe 2:

Man beweise die folgenden Aussagen:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$,

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{2^n}{n!}$,

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i^2-1) = \frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2-5n\right)$.

Aufgabe 3:

a) Mit Hilfe des Binomischen Satzes zeige man für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ die Abschätzung
$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n^2}{4}x^2 .$$

b) Man zeige $a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar.

Aufgabe 4:

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Man gebe Beispiele mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ an, für die obige Aussage falsch ist, insbesondere soll gelten:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \infty$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = -\infty$.

Aufgabe 5:

a) Man untersuche die Folge $a_n = n^3 - 2 - \sqrt{n^6 - 5n^3}$, $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Man untersuche die rekursiv definierte Folge $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{2}$, $n \geq 1$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

c) Man untersuche die Folge $c_n = \tan\left(\frac{\pi n - 1}{4n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6:

a) Die Sinus-Reihe ist gegeben durch $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese Reihe konvergent? Man berechne ohne Verwendung eines Taschenrechners eine Näherung für $\sin 1$ mit einem gesicherten absoluten Fehler von höchstens 10^{-7}.

b) Man benutze die Summenformel der geometrischen Reihe um die reelle Zahl $x = 3.70\overline{451}$ als Bruch darzustellen.

Aufgabe 7:

Der 'Turm von Babylon' werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ Meter nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \cdots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$ -ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

a) Wie hoch wird der Turm?

b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

c) Kommen die 'Baumeister' mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

Aufgabe 8:

Man bestimme die folgenden Funktionsgrenzwerte (ohne Verwendung der Regeln von de l'Hospital). Ist die in a) auftretende Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ stetig?

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}$, b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$, c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}$, d) $\lim_{x \to \infty} 2x - \sqrt{4x^2 - x}$.

Aufgabe 9:

Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen und vereinfache die sich ergebenden Ausdrücke:

a) $f(x) = (x+2)^2 - 8(x+2) + 8\ln(x+2)$, b) $g(x) = 3\arctan x + \dfrac{3x}{(x^2+1)} + \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$,

c) $h(x) = \ln \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, d) $p(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{4x+5}}$, e) $q(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$, f) $r(x) = x\tan x + \ln(\cos x)$.

Aufgabe 10:

Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x\ln x - x$, b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$,

c) $h(x) = \operatorname{arcosh} x$, d) $p(x) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$.

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \ln(a(x+1)+b) + xe^x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Man berechne das Taylorpolynom 4. Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Wie müssen die Konstanten a und b gewählt werden, damit die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit möglichst hoher Ordnung beginnt.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x\tan x}{1-\cos x}$ mit $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

a) Mit der Regel von de l'Hospital berechne man den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Man zeige, dass $f(x)$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 13:

Gegeben sei die reellwertige Funktion $f(x) = (x^2-1)\,e^x$.

Man diskutiere die Funktion. Dazu untersuche man im Einzelnen: Definitionsbereich, Symmetrien, Pole, Verhalten im Unendlichen und Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Monotonie, Wendepunkte und Konvexität. Abschließend zeichne man den Graphen von $f(x)$.

Aufgabe 14:

Man diskutiere die reellwertige Funktion $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$. Ist f überall differenzierbar?