Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. C. Geiger
Dr. K. Rothe

WiSe 1999/2000

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$$

$$\text{c)}\ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{d)}\ \frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{256}+\frac{81}{1024}+\cdots$$

$$\text{e)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) \qquad \text{f)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}$$

$$\text{g)}\ \sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+2}{j^2-4} \qquad \text{h)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k}\right)^k .$$

Aufgabe 14:

a) Man gebe für die folgenden Mengen D_k die Menge aller Häufungspunkte D_k' und die Menge aller inneren Punkte D_k^0 an:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup [0,1]\,, \\ D_2 &= \left]-\infty, 0\right[\,, \\ D_3 &= [1,2[\times [0,\infty[\,. \end{aligned}$$

Welche der Mengen D_k sind abgeschlossen bzw. offen?

b) Für welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$? Man begründe die Antwort und berechne den Grenzwert falls er existiert.

(i) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{für } \ x \neq -1 \\ 0 & \text{für } \ x_0 = -1 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für} \quad x<2 \\ x-2 & \text{für} \quad x>2 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad x_0 = 2$$

$$\text{(iii)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x<1 \\ 2-x & \text{für} \quad x>1 \\ 0 & \text{für} \quad x_0=1 \end{cases}$$

Aufgabe 15:

Man untersuche direkt mit der $\varepsilon - \delta-$Charakterisierung die folgenden reellen Funktionen f auf Stetigkeit im Punkt x_0:

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x>0 \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x_0=0 \\ 0 & \text{für} \quad x<0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für} \quad x \geq 1 \\ x-1 & \text{für} \quad x<1 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 1$$

$$\text{c)} \quad h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{für} \quad x>0 \\ x & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 0 \quad .$$

Aufgabe 16:

a) Man bestimme die folgenden Funktionsgrenzwerte, falls sie existieren

$$\text{(i)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2-y^2|}{|x|+|y|} \quad , \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4} \quad .$$

b) Kann die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2(x+y)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

stetig in $(0,0)$ fortgesetzt werden?

Abgabetermin: 3.1, 4.1 oder 6.1.00 vor der Übung