

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Wintersemester 2004/2005

Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

Primzahlen, ggT und kgV

Definition: Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $n \in \mathbb{N}$, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$n = k \cdot m$$

Man schreibt dann auch $m|n$.

Jede Zahl besitzt also offensichtlich die beiden Teiler 1 und n , denn es gilt stets

$$n = n \cdot 1 = 1 \cdot n$$

Existiert für $n > 1$ kein weiterer Teiler, so nennt man n eine **Primzahl**.

Die ersten Primzahlen lauten

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$$

Primzahlzwillinge: $\{3, 5\}, \{5, 7\}, \{11, 13\}, \{17, 19\}, \dots ?$

Alternative Charakterisierung von Primzahlen: ist für $p \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\forall_{a,b \in \mathbb{N}} (p|(ab) \Rightarrow p|a \vee p|b)$$

wahr, so ist p eine Primzahl.

Primzahlzerlegung einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$

Satz: Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich (in eindeutiger Weise) als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben,

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k} : p_j \text{ prim}, \quad r_j \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: (vollständige Induktion) Definiere Aussageformen

$$A(n) := \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_k \text{ prim}, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N} : n = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

$$\tilde{A}(n) := \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\} : A(k)$$

Induktionsanfang: $1 = 2^0$

Induktionsschluss:

Ist $n + 1$ eine Primzahl, so ist Behauptung mit $n + 1 = (n + 1)^1$ klar.

Ist $n + 1$ keine Primzahl, so gibt es $k, m \in \{2, 3, \dots, n\}$ mit $n + 1 = k \cdot m$.

$\Rightarrow n + 1$ besitzt Primzahlzerlegung, da k und m eine besitzen.

Definition: Für zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ nennt man

$$\text{ggT}(n, m) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n \text{ und } m\}$$

den **größten gemeinsamen Teiler** von n und m ,

$$\text{kgV}(n, m) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid n \text{ und } m \text{ teilen } k\}$$

das **kleinste gemeinsame Vielfache** von n und m .

Gilt etwa

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k} \quad m = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_k^{s_k}$$

so folgt

$$\text{ggT}(n, m) = p_1^{\min(r_1, s_1)} \cdot p_2^{\min(r_2, s_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\min(r_k, s_k)}$$

$$\text{kgV}(n, m) = p_1^{\max(r_1, s_1)} \cdot p_2^{\max(r_2, s_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\max(r_k, s_k)}$$

Beispiel: Nehme

$$n = 525 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

$$m = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$$

Dann gilt

$$\text{ggT}(525, 180) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15$$

$$\text{kgV}(525, 180) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300$$

und

$$n \cdot m = 525 \cdot 180 = 15 \cdot 6300 = \text{ggT} \cdot \text{kgV}$$

Folgerung: Es gilt

$$\text{ggT}(n, m) \cdot \text{kgV}(n, m) = n \cdot m$$

Verfahren der iterierten Division (Euklidischer Algorithmus)

Wir setzen

$$r_0 := n \quad r_1 := m$$

und führen folgende Iteration durch

für $j = 1, 2, \dots$

$$r_{j-1} = q_j \cdot r_j + r_{j+1} \quad (0 \leq r_{j+1} < r_j)$$

Da $r_0 > r_1 > r_2 > \dots$, gibt es ein $r_{k+1} = 0$ (Iterationsabbruch) und

$$r_k = \text{ggT}(n, m)$$

Beispiel: Sei $n = 3054$ und $m = 1002$.

$$3054 = 3 \cdot 1002 + 48$$

$$1002 = 20 \cdot 48 + 42$$

$$48 = 1 \cdot 42 + 6$$

$$42 = 7 \cdot \boxed{6} + 0$$

Bemerkung: \mathbb{Z} -Kombination des ggT(n, m) von n und m

Lese Euklidischen Algorithmus

$$\begin{aligned} 3054 &= 3 \cdot 1002 + 48 \\ 1002 &= 20 \cdot 48 + 42 \\ 48 &= 1 \cdot 42 + \boxed{6} \end{aligned}$$

rückwärts nach der letzten Spalte

$$\begin{aligned} 6 &= 48 - 1 \cdot 42 \\ &= 48 - 1 \cdot (1002 - 20 \cdot 48) = 21 \cdot 48 - 1002 \\ &= 21 \cdot (3054 - 3 \cdot 1002) - 1002 \\ &= 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002 \end{aligned}$$

Die \mathbb{Z} -Kombination ist gegeben durch

$$\text{ggT}(3054, 1002) = 6 = 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002$$

2.2 Reelle Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen

- Ganze Zahlen \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Rationale Zahlen \mathbb{Q}

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Wie definieren wir den Zahlenbereich \mathbb{R} der reellen Zahlen?

Verwende ein

Axiomensystem zur Definition reeller Zahlen

(I) Regeln der Addition (Abelsche Gruppe)

$$(a) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(b) \quad x + y = y + x$$

$$(c) \quad x + 0 = 0 + x = x$$

$$(d) \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$$

(II) Regeln der Multiplikation

$$(a) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$(b) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(c) \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$(d) \quad x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x = 1 \quad (x \neq 0)$$

(III) Distributivgesetz (Regeln (I)–(III): Körper)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

(IV) Ordnungseigenschaften

$$(a) \quad x \leq y \vee y \leq x$$

$$(b) \quad x \leq x$$

$$(c) \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

$$(d) \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

$$(e) \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$(f) \quad x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

(V) Vollständigkeitsaxiom (Dedekind, 1872)

Sei \mathbb{R} zerlegt: $\mathbb{R} = L \cup R$ ($L, R \neq \emptyset$) und $\forall x \in L, y \in R : x < y$. Dann gibt es genau eine **Schnittzahl** $s \in \mathbb{R}$ mit :

$$\forall x \in R, y \in R : (x \leq s \leq y)$$

Bemerkung: Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} erfüllt nicht das Vollständigkeitsaxiom (V). Denn für

$$L := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \vee x < 0\}$$

$$R := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \wedge x > 0\}$$

gibt es keine Schnitzzahl. Diese wäre $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Weitere Regeln beim Rechnen mit Ungleichungen (aus Axiomen (IV))

- (1) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$
- (2) $x \leq y \wedge z \leq 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$
- (3) $x^2 \geq 0$
- (4) $x \leq y \wedge u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$
- (5) $0 \leq x \leq y \wedge 0 \leq u \leq v \Rightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$

Definition: Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der **Betrag** von a .

$|a - b|$ = (nichtnegative) Abstand der Zahlen a, b auf der Zahlengerade.

Eigenschaften:

- (1) $|a| \geq 0$
- (2) $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$
- (3) $|ab| = |a| |b|$
- (4) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (**Dreiecksungleichung**)
- (5) $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$)
 $= (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (**ε -Umgebung von a**)

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$, also M eine Teilmenge von \mathbb{R} .

1) Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke** von M , falls gilt:

$$\forall w \in M : w \leq x$$

Analog definiert man den Begriff **untere Schranke von M** .

2) Die Menge M heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, falls es eine obere (bzw. untere) Schranke von M gibt.

3) Die Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum von M** , falls s die kleinste obere Schranke von M ist, d.h.

- s ist eine obere Schranke von M
- für jede beliebige obere Schranke x von M gilt: $s \leq x$

Bezeichnung: $s := \sup M$.

Analog definiert man den Begriff **Infimum von M** .

Beispiel: Sei $I := [1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$

Dann ist

- jede Zahl $x \geq 2$ eine obere Schranke von I ,
- jede Zahl $x \leq 1$ eine untere Schranke von I .

Also gilt

$$\sup [1, 2) = 2 \quad \inf [1, 2) = 1$$

Beispiel: Man betrachte die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}, \dots \right\}$$

Daher gilt

$$\sup M = \frac{3}{2} \quad \inf M = 0$$

Satz: Jede nichtleere, nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Beweis: Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms.

Folgerungen:

1) Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.

2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < x$$

3) Zwischen zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es immer (unendlich viele) rationale Zahlen.