

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

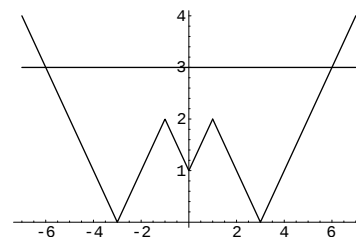
- a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die $|2 - |1 - |x||| \leq 3$ gilt;
 b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die $\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}} < 2$ gilt ;
 c) Man bestimme alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ für die $|x - 2| + 2 \leq |y|$ gilt.

Lösung:

- a) Fallunterscheidung:

$$|x| \leq 1: \quad |2 - |1 - |x|| = |2 - (1 - |x|)| \\ = |1 + |x|| \leq 1 + |x| \leq 2 \leq 3 \text{ gilt also immer}$$

$$|x| \geq 1: \quad |2 - |1 - |x|| = |2 + (1 - |x|)| = |3 - |x|| \\ \leq 3 \text{ gilt nur für } |x| \leq 6$$



Lösungsmenge $L = \{x: -6 \leq x \leq 6\}$

Bild 5 a): $f(x) = |2 - |1 - |x||$

- b) Die Ungleichung ist für $x \in \{0, -2, -1\}$ nicht definiert. Im übrigen soll gelten

$$\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2 < 2,$$

was nicht sein kann. Also ist die Lösungsmenge $L = \emptyset$.

- c)

Die Ungleichung ist äquivalent mit

$$y \geq 2 + |x - 2| \vee y \leq -2 - |x - 2|$$

Man betrachte im $\mathbb{R}^2$ $y \geq g(x) = 2 + |x - 2|$
 und $y \leq h(x) = -2 - |x - 2|$ und sieht dann
 den Rest.

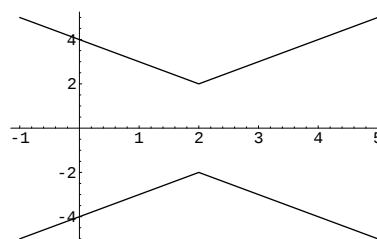


Bild 5 c):

$$g(x) = 2 + |x - 2|, \\ h(x) = -2 - |x - 2|$$

Aufgabe 6:

Man beweise z.B. mit vollständiger Induktion:

- a) $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$
 b) $10^n - 3^n$ ist durch 7 teilbar $\quad \forall n \in \mathbb{N},$
 c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Lösung:

a) direkt: $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

vollständige Induktion:

Ind.anf.: $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1}$, also richtig;

Ind.ann.: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$

Ind.schl.: $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
 $= \frac{1}{n+1} \left(n + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+2)n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

b) Ind.anf.: $10^1 - 3^1 = 7$, also richtig;

Ind.ann.: $10^n - 3^n$ ist durch 7 teilbar

Ind.schl.: $10^{n+1} - 3^{n+1} = 10 \cdot 10^n - 3 \cdot 3^n = 10 \cdot 10^n - 10 \cdot 3^n + 7 \cdot 3^n$
 $= 10(10^n - 3^n) + 7 \cdot 3^n$ also auch durch 7 teilbar

c) Ind.anf.: $\frac{1}{1} \leq 2 - \frac{1}{1}$, ist also richtig;

Ind.ann.: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Ind.schl.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
 $= 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{n^2 + 2n + 1 - n}{n(n+1)^2}$
 $= 2 - \frac{1}{n+1} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

Aufgabe 7:

- a) Man entscheide ohne Zuhilfenahme eines (Taschen-)Rechners, welche der beiden Zahlen $\sqrt{24} + \sqrt{37}$ und $\sqrt{28} + \sqrt{32}$ größer ist (Hinweis: indirekter Beweis).
- b) Man begründe auf wieviele Nullen die Zahl $68!$ endet.

Lösung:

- a) Mit Hilfe eines indirekten Beweises zeigen wir, dass aus der (wahren) Aussage $A : 16 \cdot 888 > 961$ die Behauptung $B : \sqrt{24} + \sqrt{37} > \sqrt{28} + \sqrt{32}$ folgt:

$$\neg B : \quad \sqrt{24} + \sqrt{37} \leq \sqrt{28} + \sqrt{32}$$

$$\Rightarrow \quad (\sqrt{24} + \sqrt{37})^2 \leq (\sqrt{28} + \sqrt{32})^2$$

$$\Rightarrow \quad 24 + 2\sqrt{24}\sqrt{37} + 37 \leq 28 + 2\sqrt{28}\sqrt{32} + 32$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2\sqrt{24}\sqrt{37} \leq 2\sqrt{28}\sqrt{32}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2\sqrt{888} \leq 2\sqrt{896}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 4\sqrt{888} + 4 \cdot 888 \leq 4 \cdot 896$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{888} \leq 31$$

$$\Rightarrow \quad 16 \cdot 888 \leq 31^2 = 961 \quad : \neg A$$

- b) Die Anzahl der Nullen am Ende von $68!$ ist gleich der höchsten Potenz von 10, durch die $68!$ teilbar ist.

Nun ist $10 = 2 \cdot 5$ und die Zahl 2 ist in $68!$ viel häufiger als Faktor enthalten als die Zahl 5. Also müssen wir die höchste Potenz von 5 finden, die in $68!$ enthalten ist.

Unter den Zahlen $1, \dots, 68$ sind 13 durch 5 teilbar, nämlich $5, 10, 15, \dots, 65$.

Unter diesen sind zwei durch 25 teilbar, also ist $68!$ durch 5^{15} teilbar (jedoch nicht durch 5^{16}). Damit hat $68!$ genau 15 Nullen am Ende.

Aufgabe 8:

- a) Man bestimme für die Zahlen 1617 und 525 den ggT und das kgV .
- b) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m, k \in \mathbb{N}$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$(i) \quad \binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1},$$

$$(ii) \quad \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) Euklidischer Algorithmus} \quad 1617 &= 3 \cdot 525 + 42 \\ 525 &= 12 \cdot 42 + 21 \\ 42 &= 2 \cdot 21 + 0 \end{aligned}$$

$$\implies ggT(1617, 525) = 21$$

$$\implies kgV = \frac{1617 \cdot 525}{ggT} = \frac{1617 \cdot 525}{21} = 1617 \cdot 25 = 40425.$$

Alternative: Primfaktorzerlegung

$$1617 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11, \quad 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$ggT(1617, 525) = 3 \cdot 7 = 21, \quad kgV(1617, 525) = 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = 40425.$$

$$\text{b) } \binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-(m+1))!} = \binom{n+1}{m+1},$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-(m-k))!} \\ &= \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}. \end{aligned}$$