

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1:

- a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) := (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

- b) Geben Sie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(x; 0)$ von f an und schätzen Sie den absoluten Abbruchfehler $|T_3(x; 0) - f(x)|$ auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ab.
- c) Geben Sie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(x; 0)$ der Funktion

$$g(x) := \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln(x).$$

- a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades $T_4(x; 1)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
- b) Schätzen Sie den absoluten Abbruchfehler $|T_4(x; 1) - f(x)|$ auf dem Intervall $[1, 2]$ ab.
- c) Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$, so dass $|T_n(2; 1) - f(2)| < 0.01$ gilt.
- d) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ gegebene Konstanten und $\ln(a)$ bekannt. Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades $T_4(x; 1)$ der Funktion

$$g(x) := \ln(ax^2) + b + c(x-1)^2 + d(x-1)^4,$$

und schätzen Sie den absoluten Abbruchfehler $|T_4(x; 1) - g(x)|$ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ab.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen (ggf. nach stetiger Ergänzung in x_0) das Taylorpolynom n -ten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$f_1(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, \quad n = 3, \quad f_2(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}, \quad n = 3,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}}, \quad n = 7, \quad f_4(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad n = 3,$$

$$f_5(x) = x^2 e^x - 1, \quad n = 4,$$

Hinweise:

1) Taylorpolynome dienen in der Regel der lokalen Approximation. Sie dürfen also bei Bedarf davon ausgehen, dass $|x|$ hinreichend klein ist.

2) Zur Lösung dieser Aufgabe brauchen Sie keine einzige Ableitung zu berechnen.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2 \sin(x)},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x,$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right),$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^3 - x^2 + 2x},$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3 - 1}},$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} \right),$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a^x, \quad n \in \mathbb{N}, a > 1.$

Abgabetermine: 2.-6.2.2004 (zu Beginn der jeweiligen Übung)