

# Analysis I

## für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 5

#### Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie ohne Verwendung der Regel von l'Hospital die folgenden Grenzwerte.

(i)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} [\ln(x^2 - x - 6) - \ln(x - 3)]$ ,

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + x)^n}{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  fest,

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 27}$ ,

(iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \sqrt{x^2 + 1} + x \right)$ .

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes und des Satzes von Rolle die Anzahl der reellen Nullstellen der durch  $f(x) = e^{2x} + x^3$  und  $g(x) = \cos(x) - 2x^2$  gegebenen Funktionen.

#### Aufgabe 2:

Eine Funktion  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  heißt Lipschitz-stetig auf  $[a, b]$ , wenn es eine Konstante  $L \geq 0$  gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

gilt.

a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist.

b) Welche der folgenden Funktionen ist Lipschitz-stetig?

$$f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

#### Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} & f(x) = \ln(\cos^2(x^3)) e^{x^2}, \\ g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} & g(x) = x^x, \\ h : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R} & h(x) = \left( x(\ln(x))^2 - \frac{x^2}{2 + \sin(x)} \right)^{-1}. \end{array}$$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : (-2, \infty) \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln \sqrt{2+x} - \frac{1}{x+2}.$$

(i) Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ .

(ii) Zeigen Sie, dass für alle Ableitungen der Ordnung  $k \geq 1$  von  $f$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \left( \frac{(k-1)!}{2(x+2)^k} + \frac{k!}{(x+2)^{k+1}} \right) \text{ gilt.}$$

#### Aufgabe 4:

- a) Gegeben sei die Parabel  $p(x) = cx^2 + d$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ . Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt  $(x_0, p(x_0))^T$ . Welche Tangenten gehen durch den Punkt  $(0, 0)^T$ ?
- b) Gegeben sei die Funktion  $s : [0, \frac{\pi}{2}) \mapsto [1, \infty)$ ,  $s(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ . Berechnen Sie die erste Ableitung von  $s$ , die erste Ableitung der Umkehrfunktion  $q := s^{-1}$  von  $s$  und die erste Ableitung der Funktion  $\arccos(\frac{1}{x})$ .

**Abgabetermine:** 19.1-23.1.2004 (zu Beginn der jeweiligen Übung)

*Frohes Neues Jahr!*

*Das Team der Analysis I wünscht Ihnen ein gutes und erfolgreiches Jahr 2004!*