

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$	e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$	f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})^n$	h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{nx}{2})}{2^n}$	

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n+1)(n+2)}$ konvergiert.

Sei s der Grenzwert der Reihe und s_k die Partialsumme

$$s_k := \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{n}{(2n+1)(n+2)}.$$

Geben Sie eine natürliche Zahl k an, so dass der Abbruchfehler $|s_k - s|$ kleiner als 0.01 wird.

b) (Klausuraufgabe vom 10.9.2001, Prof. Oberle) Gegeben sei die Folge

$$a_n := \frac{5n^2}{(n-1)(n+1)(n+2)} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Beweisen Sie

- (i) $0 < a_n \leq \frac{5}{n+1}; \forall n \geq 2,$
- (ii) $(a_n)_{n \geq 2}$ ist monoton fallend,
- (iii) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.
- (iv) Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert der Reihe an.

Aufgabe 3:

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(x) & \text{für } x \leq 0, \\ Ax + B & \text{für } x \in (0, 2), \\ 1 - 5\frac{x-1}{x^2+1} & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

Wählen Sie die Zahlen A und B aus \mathbb{R} , so dass die Funktion auf ganz \mathbb{R} stetig wird.

b) Die Funktion $f : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(r) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2r} - r^n \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right)}{1 + r^n \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right)}$$

besitzt im Intervall $[0, 2]$ keine Nullstelle, obwohl $f(0)$ positiv ist und $f(2)$ negativ ist. Wie verträgt sich das mit dem Zwischenwertsatz?

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen in den jeweils angegebenen Punkten x_0 einen linksseitigen und/oder einen rechtsseitigen Grenzwert haben. Welche Funktionen sind in x_0 stetig?

a)

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_0 = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-2x} & \text{für } x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

c)

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x_0 = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

d)

$$l(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{für } x > 0 \\ x^2 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{in } x_0 = 0$$

e)

$$k(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1, 3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \{1, 3\} \end{cases} \quad \text{in } x_0 = 1$$

Abgabetermine: 5.1-9.1.2004 (zu Beginn der jeweiligen Übung)