**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2003/04**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. P. Kiani

# Analysis I
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 3

**Aufgabe 1:**

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Alle auftretenden Folgen seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

$$
\begin{aligned}
a_n =& n^3\left(\sqrt{n^6+5}-\sqrt{n^6-3}\right),\\
b_n =& \left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{2n^3+3n^2+3}{n^2}-n\right)\right]^3,\\
c_n =& \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{9n},\\
d_n =& \left(\frac{4+3i}{10}\right)^n, \qquad i^2=-1,\\
e_n =& \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)+n}{n-1+n\cos\left(\dfrac{n}{2n^2+1}\pi\right)}
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 2:**

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Alle auftretenden Folgen seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

$$\begin{aligned}
a_1 =& 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1), \\
b_1 =& 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{6b_n - 1}, \\
c_1 =& \sqrt{5}, \quad c_{n+1} = \sqrt{5c_n}, \\
d_n =& \left( \frac{n^2 - 1}{4n^2 + n}, \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right), n^{-\frac{1}{2}} \right), \\
e_n =& \left( \frac{(-1)^n}{n}, \frac{\sqrt{n^2+1} + \cos(n\pi)}{n+1}, \log(\frac{n}{n+2}) \right).
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3:**

Betrachten Sie die Folge $t_n$, die das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion $f(t) := 4t^2 - 1$ mit dem Startwert $t_0 = 1$ erzeugt.

a) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt ist.

b) Weisen Sie die quadratische Konvergenz des Verfahrens nach. Beweisen Sie also die Gültigkeit der Ungleichung

$$|t_{n+1} - t^*| = |t_{n+1} - \frac{1}{2}| \leq C|t_n - \frac{1}{2}|^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $C$ eine geeignete Konstante ist.

**Aufgabe 4:** Es sei $r \in \mathbb{R}, r > 0$ fest vorgegeben und

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2 + r^n}{2r^n + 1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge an.

**Abgabetermine:** 8.12-12.12.2003 (zu Beginn der jeweiligen Übung)