Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2003/04**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:

Geben Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x)$, jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D und den zugehörigen Bildbereich $B := f(D)$ an.

$$y = \frac{1}{\sqrt{(6 + x - x^2)}} \qquad y = \frac{1}{\log(x^3 + x^2 + x + 1)}$$

$$y = \sqrt{\cos\sqrt{x}} \qquad y = \arccos\left(\frac{\sqrt{25 - x^2}}{3}\right)$$

Aufgabe 2:

a) Bei der Parallel– bzw. Hintereinanderschaltung zweier Ohmscher Widerstände R_1 und R_2 ergeben sich die Gesamtwiderstände R_P bzw. R_H aus

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad R_H = R_1 + R_2.$$

Zeigen Sie, dass stets $R_H \geq 4R_P$ gilt. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

b) Ist die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ mit } \ x = \sum_{k=1}^{4} \frac{n(-1)^{kn}}{(n+1)k} \right\}$$

beschränkt?

Bestimmen Sie ggf. Infimum und/oder Supremum von M .

Aufgabe 3:

Man beweise mit vollständiger Induktion

a)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

b) (Aufgabe 1a, Vordiplomsklausur WiSe 02/03)
$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k^3-k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)} \qquad n \geq 2\,,$$

c)
$$(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 \qquad \forall x \in (0,1) \;\text{ und } \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Gilt die Formel auch an den Grenzen des angegebenen Intervalls, also für $x \in \{0,1\}$?

Aufgabe 4:

a) Fibonacci–Zahlen: Seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann die Formel
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: es gilt $\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm 2\sqrt{5} + 5}{4} = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Was ist falsch an dem folgenden „Induktionsbeweis" dafür, dass alle Studierenden das gleiche Studienfach haben?

Zu beweisen ist die Aussage:

A(n) : In jeder Gruppe von n Studierenden, studieren alle das gleiche Fach.

Induktionsanfang : $n = 1$. Die Aussage ist trivialerweise erfüllt.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei für alle $n \leq N$ mit einem festen, beliebigen $N \in \mathbb{N}$ wahr.

Induktionsschluß: Wir beweisen die Aussage für $n = N+1$. Dazu betrachten wir eine Gruppe von $N+1$ Personen, entfernen eine Person P1 aus der Gruppe. Dann besteht der Rest der Gruppe aus N Studierenden und diese studieren nach Voraussetzung alle das gleiche Fach. Nun nehmen wir P1 wieder dazu und lassen eine andere Person P2 fort. Dann besteht die Restgruppe wieder aus N Personen und diese studieren nach Voraussetzung alle das gleiche Fach. Also haben alle $N+1$ Personen das gleiche Studienfach.

Abgabetermine: 24.11-28.11.2003 (zu Beginn der jeweiligen Übung)