Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2003/04**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Gültigkeit folgender Äquivalenzen:

(i)
$$((A \vee B) \wedge \neg(B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

(ii)
$$((A \wedge (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

(iii)
$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$$

b) Die auf reellwertige Funktionen einer reellen Variablen beschränkte Version eines wichtigen Satzes lautet: Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt auf jeder beschränkten, abgeschlossenen Menge $D \subset \mathbb{R}$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Was schließen Sie aus der Information, dass eine gegebene Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einer gegebenen Menge $D \subset \mathbb{R}$ keinen maximalen Wert annimmt.

Aufgabe 2:

a) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Verneinen Sie die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ so dass für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ stets}$$
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ gilt .}$$

b) Beweisen Sie folgende Aussagen indirekt oder widerlegen Sie die Aussagen mit Hilfe eines Gegenbeispiels.

(i)
$$\log_{10} 2, \log_{10} 5 \notin \mathbb{Q}.$$

(ii)
$$(a \in \mathbb{Q}) \wedge (b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Longrightarrow \; a - b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

(iii)
$$(b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \wedge (c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Longrightarrow \; b + c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 3: Beweisen Sie (möglichst mit vollständiger Induktion)

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n-1+n &= \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \\ 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \forall q \neq 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der $x-y$–Ebene.

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + (y+1)^2 < 4\}, \\ M_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (|x| + |y| < 2) \wedge (y > -1)\}, \\ M_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \max\{|x|, |y|\} < 2\}, \\ M_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \big(x^2 + (y-1)^2 < 9\big) \wedge (y > |x|)\}, \\ M_5 &= [0,1] \times [0,2] \times [-1,0] \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Abgabetermine: 10.11-13.11.2003 (zu Beginn der jeweiligen Übung)