Aufgabe 1:

a) Man bestimme $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin(x)\ln(1+x)}$.

b) Man zeige die Konvergenz der Folge

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} .$$

(Hinweis: Monotonie und Beschränktheit)

c) Für die Funktion $f(x)$ bestimme man die Tangente im Punkt $\pi/2$

$$f(x) = \left(\exp(x),\ \sinh(x),\ \frac{\cos(x)}{x-\pi/2}\right)^T .$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{2+x}\right) - \frac{1}{x+2}$$

definierte reellwertige Funktion.

a) Man bestimme $\lim_{x\to -2+} f(x)$.

b) Für f berechne man zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ das Taylorpolynom $T_3(x; x_0)$.

c) Als Näherungswert für $f(-\frac{1}{2})$ bestimme man den Wert des Taylorpolynoms $T_3(-\frac{1}{2}; -1)$ und schätze den Fehler nach oben ab.

d) Wie lautet die Tangentengleichung für f im Punkt $x_0 = -1$?

e) Warum kann die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ im Punkt $x = -2$ nicht gegen f konvergieren?