

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen und Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{3^k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^k}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$

Hinweis zu b): Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{3+2n}{4 \cdot 3^n}$$

und verwenden Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

- Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
- Berechnen Sie das globale Maximum auf dem Intervall $[1, 2]$.
- Auf welchen Bereichen ist die Funktion monoton wachsend bzw. fallend?