Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

SoSe 2025

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 7:
Das Residuenkalkül

Claus R. Goetz
Universität Hamburg • Fachbereich Mathematik

1. Singularitäten und ihre Residuen

Charakterisierung isolierter Singularitäten

Sei z_0 eine isolierte Singularität einer analytischen Funktion f. Dann gilt:

- z_0 ist genau dann **hebbar**, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
  - f ist auf einem Ring $R_0^r(z_0)$ für ein $r > 0$ beschränkt.
  - $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existiert.
  - $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.
- z_0 ist genau dann ein **Pol**, wenn $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.
- z_0 ist genau dann ein **Pol der Ordnung** m, wenn $h(z) := (z - z_0)^m f(z)$ in z_0 eine hebbare Singularität hat und $h(z_0) \neq 0$ gilt.

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$ Singularitäten: $z_0 = 0$, $z_1 = i$

$\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-i}\Big|_{z=0} = \frac{1}{-i} = i \neq 0$ ⇝ Pol zweiter Ordnung (doppelter Pol)

$\lim\limits_{z\to i} (z-i)^1 f(z) = \lim\limits_{z\to i} \frac{1}{z^2} = -1 \neq 0$ ⇝ Pol erster Ordnung (einfacher Pol)

Beispiel: $f(z) = \exp\left(\dfrac{1}{z}\right), \quad z_n = 1/n, \quad \tilde{z}_n = -\mathrm{i}/n, \quad n \in \mathbb{N}$

$z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\tilde{z}_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$|f(z_n)| = |e^n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, aber

$|f(\tilde{z}_n)| = \left|\exp\left(\frac{1}{-i/n}\right)\right| = |e^{in}| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{z\to 0} |f(z)|$ existiert nicht ⇝ wesentliche Singularität

Zum komplexen L'Hospital

Es seien

- f, g analytisch,
- $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$.

Dann gilt in einer Umgebung von z_0 für $z \neq z_0$:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^n}$$

$$= \frac{a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1}}{b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-1}} \longrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Beispiel: $\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z}$ $= \frac{0}{0}$, $\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos(z)}{1} = \cos(0) = 1.$

Das Residuum

Sei z_0 eine isolierte Singularität einer analytischen Funktion f. Für ein $r > 0$ konvergiere die Laurent-Reihe von f um z_0 in $R_0^r(z_0)$.
Dann nennen wir den Koeffizienten

$$\operatorname{Res}(f, z_0) \;:=\; c_{-1} \;=\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{[\text{illegible}]} \, \mathrm{d}z$$

der zugehörigen Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < r,$$

das **Residuum** von f bei z_0.

Berechnung von Residuen

- Hat f bei z_0 einen einfachen Pol, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) \;=\; \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

- Hat f bei z_0 einen Pol der Ordnung $m \geq 2$, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) \;=\; \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{(m-1)}}{\mathrm{d}z^{(m-1)}} \left[\frac{(z - z_0)^m f(z)}{(m-1)!} \right].$$

- Ist $f(z) \;=\; \dfrac{p(z)}{q(z)}$ mit analytischen p, q, sodass $q(z_0) = 0,\ q'(z_0) \neq 0$, so ist

$$\operatorname{Res}(f, z_0) \;=\; \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Beispiel: $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})z^2}$.

$z_0 = 0$ (doppelter Pol)
$z_1 = 1$ (einfacher Pol)

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{z-i} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z-i)-e^z}{(z-i)^2} = \frac{-i-1}{-1} = 1+i.$$

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{e^z}{z^2} = -e^i.$$

Pol ordnung 3

Beispiel: $f(z) = \dfrac{2z^3+3z^2+2z+1}{z^4+z^3} = \dfrac{2z^3+3z^2+2z+1}{z^3(z+1)}$.

$z_0 = 0$
$z_1 = -1$ Hebbar.

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \left.\frac{2z^3+3z^2+2z+1}{z^3}\right|_{z=-1} = 0.$$

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{2z^3+3z^2+2z+1}{z+1}\right)''\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}(2z^2+z+1)''\Big|_{z=0} = 2.$$

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$

$z^2 + 2z + 2 = (z+1)^2 + 1 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm i.$ einfache Pole

$\text{Res}(f, -1+i) = \dfrac{1}{2z+2}\Big|_{z=-1+i} = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}.$ $\left(\dfrac{p(z)}{q'(z)}\right)$

$\text{Res}(f, -1-i) = \dfrac{1}{2z+2}\Big|_{z=-1-i} = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{i}{2}.$

Beispiel: $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z(z^2+1)}$ $\quad z_0 = 0, \quad z_{1,2} = \pm i$

$\lim\limits_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{\sin(z)}{z(z+i)} = \dfrac{\sin(i)}{i(2i)} = -\dfrac{1}{2}\sin(i) \neq 0$: einfache Pol

$\mathrm{Res}(f, i) = -\frac{1}{2}\sin(i)$

$\lim\limits_{z\to -i} (z+i) f(z) = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{\sin(z)}{z(z-i)} = \dfrac{\sin(-i)}{-i(-2i)} = \dfrac{\sin(i)}{2} \neq 0$, einfache Pol, $\mathrm{Res}(f, -i) = \frac{1}{2}\sin(i)$

Für $z_0 = 0$: $f(z) = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{\sin(z)}{z^2+2} = \dfrac{1}{2} \cdot (0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots)$ ← analytisch nahe 0

Taylor-Reihe um 0.

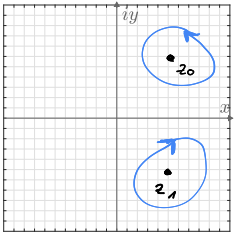
$= c_1 + c_2 z + \dots \quad \Rightarrow \quad c_{-1} = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, 0) = 0.$

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = c_1$ existiert $\Rightarrow z_0 = 0$ hebbar.

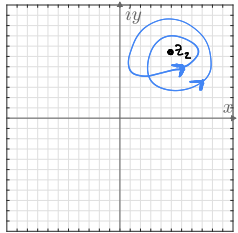
2. Der Residuensatz

Die Umlaufzahl: $\mathrm{Uml}(z_0;\Gamma) = \#$ positive Umläufe $- \#$ negative Umläufe

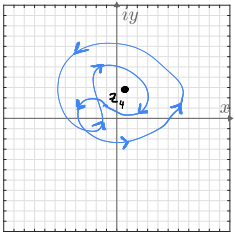


$\mathrm{Uml}(z_0,\Gamma) = 1$

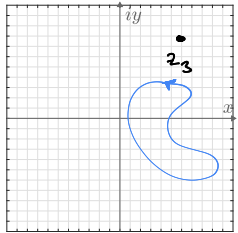
$\mathrm{Uml}(z_1,\Gamma) = -1$



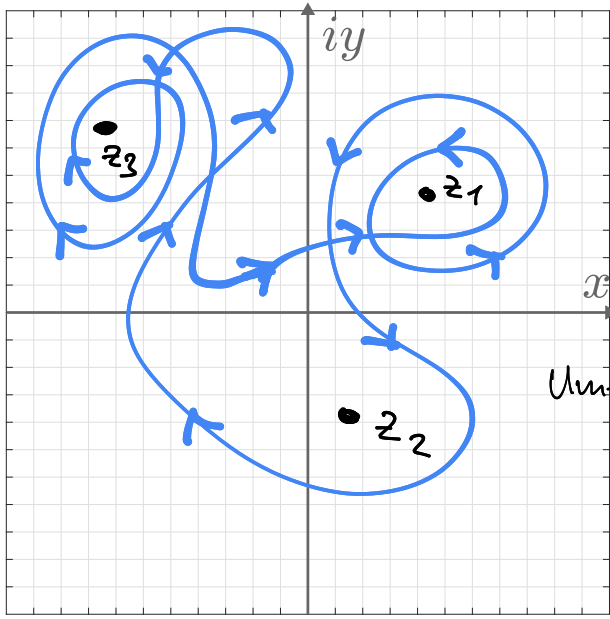
$\mathrm{Uml}(z_2,\Gamma) = 2$



$\mathrm{Uml}(z_4,\Gamma) = 0$



$\mathrm{Uml}(z_3,\Gamma) = 0$



$\mathrm{Ind}(z_3,\Gamma) = -2$

$\mathrm{Ind}(z_1,\Gamma) = 2$

$\mathrm{Ind}(z_2,\Gamma) = 1$

Der Residuensatz

Es sei

- G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_1, \ldots, z_N$ Punkte in G;
- f auf $G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$ analytisch;
- Γ geschlossene Kurve in G, die alle z_k jeweils mit Umlaufzahl $\mathrm{Uml}(\Gamma, z_k)$ umläuft.

Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Uml}(\Gamma, z_k)\cdot \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Beispiel: $f(z) = \dfrac{2z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^4 + z^3}, \qquad \Gamma = \partial B_{\pi/2}(0)$

$\mathrm{Ind}(z_k, \Gamma) = 1$ für alle $z_k \in B_{\pi/2}(0)$

$$\int_{\partial B_{\pi/2}(0)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, -1)\right)$$
$$= 2\pi i \quad (2 + 0) = 4\pi i$$

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}, \qquad \Gamma = \partial B_2(0)$

$$\int_{\partial B_2(0)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, -1+i) + \mathrm{Res}(f, -1-i)\right)$$
$$= 2\pi i \quad \left(-\frac{i}{2} + \frac{i}{2}\right) = 0$$

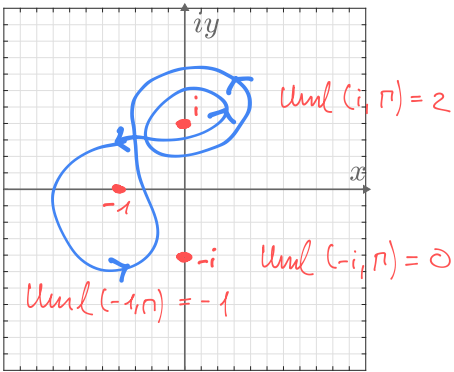
Beispiel: $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z(z^2+1)}, \qquad \Gamma = \partial B_{1/2}(\mathrm{i})$

$-\mathrm{i} \notin B_{1/2}(\mathrm{i})$

$0 \notin B_{1/2}(\mathrm{i})$

$$\int_{\partial B_{1/2}(\mathrm{i})} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, i)$$

$$= 2\pi i \cdot \left(-\frac{\sin(i)}{2}\right) = -i\pi \sin(i).$$



$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$$

$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Res}(f, \pm i) = -\frac{1}{4}(1 \pm i)$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(2\operatorname{Res}(f, i) - \operatorname{Res}(f, -1)\right)$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\right) = \pi i\,(-2 - i)$$

$$= \pi - 2\pi i.$$

3. Anwendungen des Residuenkalküls

Reelle Integrale

Es sei

- $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, p, q : Polynome mit reellen Koeffizienten und $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$,
- $z_0, \ldots, z_m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: Nullstellen von q.

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

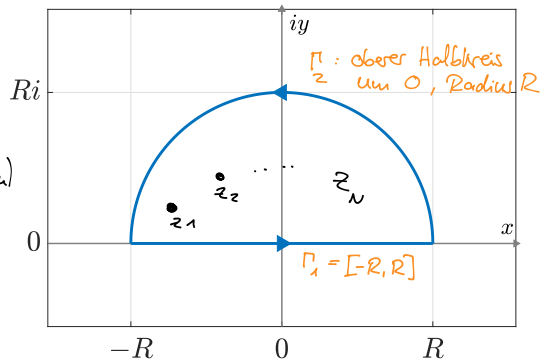
$\deg(q) \geq \deg(p) \Rightarrow |f(z)| = \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|^2}$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

Residuensatz:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

unabhängig von R!



$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \frac{C}{R^2} \cdot \pi R = \frac{C\pi}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$

Singularitäten: $z_k = \exp\left(\mathrm{i}\cdot\dfrac{(2k+1)\pi}{6}\right), \quad k = 0,\dots,5.$

$z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/6}, \quad z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 5\pi/6}$ ← positiver Imaginärteil

$z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 7\pi/6}, \quad z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 9\pi/6}, \quad z_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 11\pi/6}$

Residuen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,z_k) &= \frac{1}{6z^5}\bigg|_{z=z_k} = \frac{1}{6}\exp\left(\mathrm{i}\cdot\frac{-5(2k+1)\pi}{6}\right)\\ &= \frac{1}{6}\exp\left(\mathrm{i}\cdot\left[\frac{(2k+1)\pi}{6} - \frac{6(2k+1)\pi}{6}\right]\right)\\ &= \frac{1}{6}\exp\left(\mathrm{i}\cdot\left[\frac{(2k+1)\pi}{6} - \pi\right]\right) = -\frac{z_k}{6}\end{aligned}$$

Singularitäten mit positivem Imaginärteil:

$$z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/6}, \quad z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 5\pi/6}.$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\operatorname{Res}(f,z_0) + \operatorname{Res}(f,z_1) + \operatorname{Res}(f,z_2)\right) \\
&= -\frac{\pi\mathrm{i}}{3}\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/6} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 5\pi/6}\right) \\
&= -\frac{\pi\mathrm{i}}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2} + \mathrm{i} + \frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Komplexe Partialbruchzerlegung

Zur Erinnerung: Für ein analytisches f mit Singularität bei z_0 nennen wir in der Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

den Teil

$$h_f(z; z_0) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

den **Hauptteil** der Reihe.

Komplexe Partialbruchzerlegung

Es sei

- $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, $p,\ q$ Polynome mit $\deg(q) > \deg(p)$.
- $z_0, \ldots, z_m$; Nullstellen von q.

Dann gilt:

$$f(z) = h_f(z; z_0) + \cdots + h_f(z; z_m).$$

Ist z_k ein einfacher Pol, so ist

$$h_f(z; z_k) = \frac{\operatorname{Res}(f, z_k)}{z - z_k}.$$

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z^2-1)}$

Singularitäten: $z_0 = \mathrm{i}$ (doppelter Pol), $z_{1,2} = \pm 1$ (einfache Pole)

Residuen: $\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}, \quad \mathrm{Res}(f,1) = \dfrac{\mathrm{i}}{4}, \quad \mathrm{Res}(f,-1) = \dfrac{\mathrm{i}}{4}.$

Hauptteile: $h_f(z;1) = \dfrac{\mathrm{i}}{4(z-1)}, \qquad h_f(z;-1) = \dfrac{\mathrm{i}}{4(z+1)}$

Für $z_0 = \mathrm{i}$ betrachte die Taylor-Reihe von $g(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ um $z_0 = \mathrm{i}$:

$$g(z) \;=\; g(\mathrm{i}) + g'(\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) + \ldots \;=\; -\frac{1}{2} + \left.\frac{-2z}{(z^2-1)^2}\right|_{z=\mathrm{i}} (z-\mathrm{i}) + \ldots \;=\; -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i}) + \ldots$$

Damit

$$h_f(z;\mathrm{i}) = -\frac{1}{2(z-\mathrm{i})} - \frac{\mathrm{i}}{2(z-\mathrm{i})^2}.$$

Zusammen:

$$f(z) = -\frac{1}{2(z-\mathrm{i})} - \frac{\mathrm{i}}{2(z-\mathrm{i})^2} + \frac{\mathrm{i}}{4(z-1)} + \frac{\mathrm{i}}{4(z+1)}.$$