SoSe 2025

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 6:

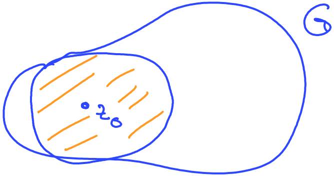
Taylor- und Laurent-Reihen
Isolierte Singularitäten

Claus R. Goetz

Universität Hamburg • Fachbereich Mathematik

1. Taylor-Reihen

Taylor-Reihen



Es seien

- $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$,
- $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots$$

Dann heißt

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

die **Taylor-Reihe** von f zum **Entwicklungspunkt** z_0.

Sie konvergiert auf dem größten Kreis um z_0, der in G enthalten ist.

Die Koeffizienten der Taylor-Reihe

Ist f in einer Umgebung von z_0 analytisch und hat dort die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$ so gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

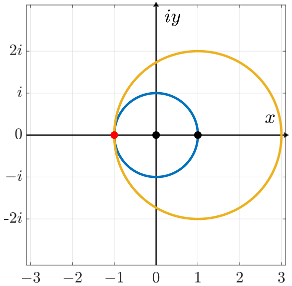
Ist Γ eine einfach geschlossene Kurve in G, die z_0 in positive Richtung umläuft, so gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Cauchy Integrations-formel

Die Reihe und ihr Konvergenzbereich hängen vom Entwicklungspunkt ab.

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} = (z+1)^{-2}$



$f'(z) = -2\,(z+1)^{-3}$

$f''(z) = 6\,(z+1)^{-4}$

$\vdots$

$f^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)!\,(z+1)^{-(n+2)}$

$z_0 = 0$: $f^{(n)}(0) = (-1)^n (n+1)!$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)!\, z^n, \quad |z| < 1.$

$z_0 = 1$: $f^{(n)}(1) = \dfrac{(-1)^n (n+1)!}{2^{n+2}} \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)!}{2^{n+2}} (z-1)^n, \quad |z-1| < 2$

Taylor-Reihen über die Ableitungen zu berechnen ist oft sehr aufwändig.

Beispiel: $f(z) = \cos^2(z)$

$$f(z) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2z))$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \cos(z)\sin(z) \\ f^{(2)}(z) &= 2\sin(z)^2 - 2\cos(z)^2 \\ f^{(3)}(z) &= 8\cos(z)\sin(z) \\ f^{(4)}(z) &= 8\cos(z)^2 - 8\sin(z)^2 \\ f^{(5)}(z) &= -32\cos(z)\sin(z) \\ f^{(6)}(z) &= 32\sin(z)^2 - 32\cos(z)^2 \end{aligned}$$

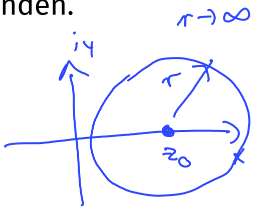
$$\begin{aligned} f'(z) &= -\sin(2z) \\ f^{(2)}(z) &= -2\cos(2z) \\ f^{(3)}(z) &= 4\sin(2z) \\ f^{(4)}(z) &= 8\cos(2z) \\ f^{(5)}(z) &= -16\sin(2z) \\ f^{(6)}(z) &= -32\cos(2z) \end{aligned}$$

Taylor-Reihe zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$:

$$f(z) = 1 \; + \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{(2n-1)}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Oft helfen reelle Taylor-Reihen weiter.

Ist z_0 reell und eine Reihenentwicklung der reellen Funktion bekannt, können wir in einer Umgebung von z_0 die reelle Reihe verwenden.



Beispiel: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

Im Komplexen: $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.

$\cos$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ die Reihendarstellung gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.

Damit: $\frac{1}{2}(1 + \cos(2z)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2z)^{2n}$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1} \cdot z^{2n}$$

Einige nützliche Reihen

- $$e^z = \sum_{k\,\cancel{n}=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$
- $$\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z-1)^n, \qquad |z-1| < 1$$
- $$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad z \in \mathbb{C}$$
- $$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

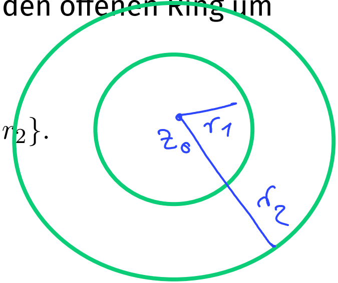
<u>**Beispiel:**</u> $$\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2. Laurent-Reihen

Etwas Notation zum Thema Ringe

- Für $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir den offenen Ring um z_0 mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 mit

$$R_{r_1}^{r_2}(z_0) \; = \; \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$



- Für $r_1 = 0$ ist

$$R_0^{r_2}(z_0) \; = \; B_{r_2}(z_0) \setminus \{z_0\}$$

die offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r_2, ohne den Mittelpunkt.

- Für $r_2 = \infty$ ist

$$R_{r_1}^{\infty}(z_0) \; = \; \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(z_0)}$$

alles außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe um z_0 mit Radius r_1.

Die Laurent-Reihe

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Es seien

- $z_0 \in \mathbb{C}, \qquad 0 \le r_1 < r_2 \le \infty$,
- f analytisch im Ring $R = R_{r_1}^{r_2}(z_0)$,
- $\Gamma \subset R$ eine Kurve, die $B_{r_1}(z_0)$ einmal im positiven Sinne umläuft.

Dann hat f für $z \in R$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Diese Reihe heißt **Laurent-Reihe** von f zum Entwicklungspunkt z_0.

Bemerkungen zur Laurent-Reihe

- Die Laurent-Reihe ist in jedem Ring R eindeutig, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad \text{für alle} \qquad z \in R$$

$$\Rightarrow \qquad c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

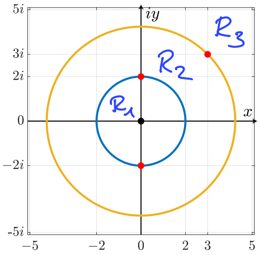
- Ist f in $B_{r_2}(z_0)$ analytisch, so ist die Laurent-Reihe gleich der Taylor-Reihe, d.h.

$$c_n = 0 \quad \text{für} \quad n < 0 \qquad \text{und} \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{für} \quad n \geq 0.$$

- Meistens möchten wir die Koeffizienten nicht über die Integraldarstellung berechnen.

Wir suchen die größten Ringe, in denen f analytisch ist.

Beispiel: $f(z) = \dfrac{e^z}{(z^3+4z)(z-3-3\mathrm{i})}$



Es gibt drei Ringe, in denen wir jeweils eine Laurent-Reihe zu $z_0 = 0$ erhalten.

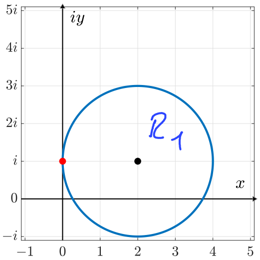
$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+4)(z-(3+3i))}$$

Singularitäten bei $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm 2i$, $z_4 = 3+3i$

R_1: $0 < |z| < 2$, R_2: $2 < |z| < \sqrt{18}$, R_3: $|z| > \sqrt{18}$.

Der Trick mit der geometrischen Reihe: $|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Beispiel: : $f(z) = \frac{1}{z-i}, \qquad z_0 = 2 + \mathrm{i}$



Für $|z - (2 + \mathrm{i})| < 2$: $\left| \frac{z-(2+i)}{2} \right| < 1$

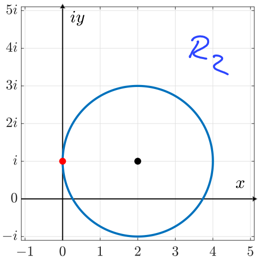
$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-(2+i)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\Big(\underbrace{-\frac{(z-(2+i))}{2}}_{q}\Big)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{z-(2+i)}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-(2+i))^n$$

Taylor-Reihe

Der Trick mit der geometrischen Reihe: $|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Beispiel: : $\quad f(z) = \frac{1}{z-i}, \qquad z_0 = 2 + \mathrm{i}$



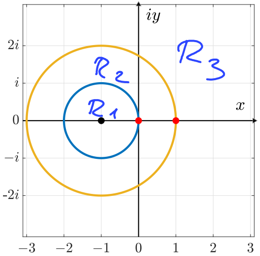
Für $\quad |z - (2+\mathrm{i})| > 2$: $\quad \left| \frac{2}{z-(2+i)} \right| < 1$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-(2+i)+2} = \frac{1}{z-(2+i)} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{-2}{z-(2+i)}\right)}_{q}}$$

$$= \frac{1}{z-(2+i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z-(2+i)}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \left(z-(2+i)\right)^{-(n+1)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} 2^{-(n+1)} \left(z-(2+i)\right)^n$$

Partialbruchzerlegung und weitere Tricks



Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^2} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2}, \quad z_0 = -1.$

In R_1: $0 < |z+1| < 1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z+1)-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z+1)^n$$

Taylor:
$c_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n$

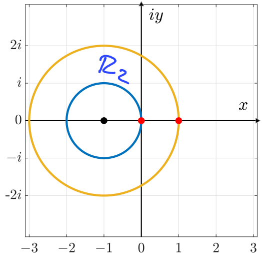
$$-\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n$$

$$-\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{(1-(z+1))^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-(z+1)}\right) = -\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} n\,(z+1)^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,(z+1)^n$$

Partialbruchzerlegung und weitere Tricks

Beispiel: $$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}, \quad z_0 = -1.$$



$R_2: \; 1 < |z+1| < 2$

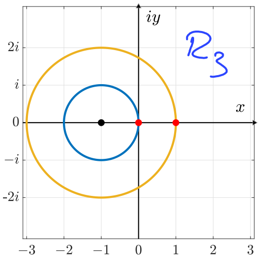
$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z+1)^n \qquad \text{(wie vorher)}$$

$$\frac{1}{1-(z+1)} = -\frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z+1}} = -\frac{1}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+1}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^{-(n+1)}$$

$$-\frac{1}{(1-(z+1))^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^{-n-2}$$

Partialbruchzerlegung und weitere Tricks

Beispiel: $\quad f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^2} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2}, \quad z_0 = -1.$



Wir sollten bekannte Reihen und Terme in der richtigen Form ausnutzen.

Beispiel: $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{(z-1)^2}, \qquad z_0 = 1, \qquad 0 < |z-1| < 1.$

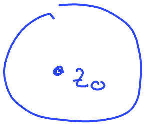
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z-1)^{n-2}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} (z-1)^n$$

hat schon die richtige Form

3. Isolierte Singularitäten

Charakterisierung von Singularitäten durch Laurent-Reihen



Eine analytische Funktion f besitzt in $z_0 \in \mathbb{C}$ eine **isolierte Singularität**, falls f in $R_0^r(z_0)$ für ein $r > 0$ definiert ist, aber nicht in z_0.

Eine isolierte Singularität heißt

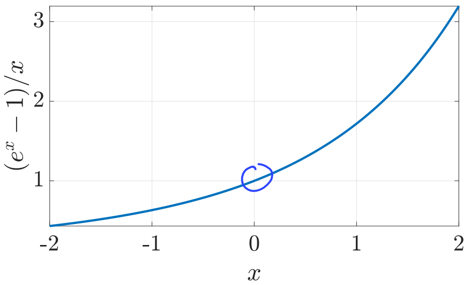
- **hebbar**, falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten c_n mit $n < 0$ verschwinden;
- **Pol der Ordnung** m, falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind und $-m$ die kleinste Zahl ist mit $c_{-m} \neq 0$.
- **wesentlich**, falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ von Null verschieden sind.

Eine hebbare Singularität

Beispiel: $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}, \quad z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)$$

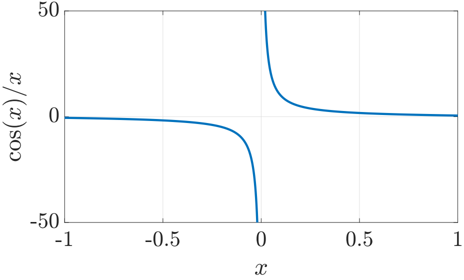
$$= \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1}$$



keine negativen Exponenten.

Eine hebbare Singularität

Beispiel: $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z}, \quad z_0 = 0$



$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

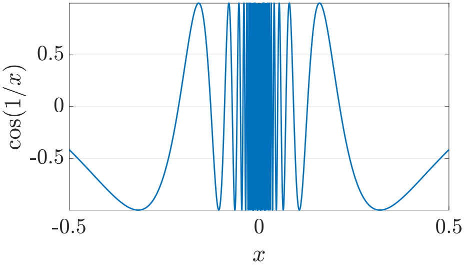
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-1}$$

$c_{-1} = 1, \quad c_n = 0$ für $n < -1$

$\Rightarrow$ Pol erster Ordnung bei $z = 0$.

Eine wesentliche Singularität

Beispiel: $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad z_0 = 0$



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n}$$

unendlich viele negative Exponenten.