Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

SoSe 2025

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 5:

Komplexe Integrale,
Cauchy Integralformeln

Claus R. Goetz

Universität Hamburg • Fachbereich Mathematik

Hier können Sie Feedback zur Hörsaalübung und zu den Gruppenübungen geben:

Hörsaalübung:

Gruppenübung:

- HÜ: `https://evaluating.tuhh.de/evasys/online.php?pswd=CNHER`
- GÜ: `https://evaluating.tuhh.de/evasys/online.php?pswd=NGSQE`

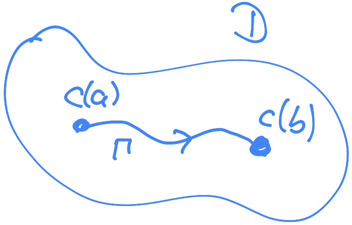
Wir brauchen Ihre Hilfe!

Wir suchen im kommenden Semester **studentische Hilfskräfte** für **Mathe III** (Analysis III / DGL I).

Falls Sie Interesse haben eine Übungsgruppe zu leiten und / oder Hausaufgaben zu korrigieren, melden Sie sich bitte bei mir!

1. Komplexe Kurvenintegrale

Komplexe Kurvenintegrale.



Es seien

- $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$,
- $\Gamma \subset D$ parametrisiert durch $c(t),\ t \in [a, b]$,

sodass gilt:

- f ist (stückweise) stetig längs Γ,
- c ist (stückweise) stetig differenzierbar mit $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

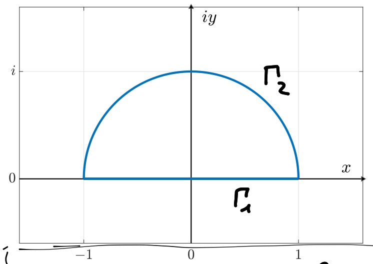
Dann existiert das **komplexe Kurvenintegral** von f entlang Γ.
Es kann berechnet werden als

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(c(t))c'(t)\,\mathrm{d}t.$$

wie Kurvenintegrale aus Ana $\underline{\text{III}}$.

$$z = x + iy$$

Beispiel: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$



$$\boxed{\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz}$$

$\Gamma_1 = [-1,1]$, $\quad c_1(t) = t$, $\quad t \in [-1,1]$

$c_1'(t) = 1$.

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-1}^{1} f(c_1(t))\, c_1'(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

$\Gamma_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = e^{it},\ t \in [0,\pi] \}$, $\quad c_2(t) = e^{it}$, $\quad c_2'(t) = i e^{it}$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \underbrace{|e^{it}|^2}_{=1} \cdot i e^{it}\,dt = i \cdot \frac{e^{it}}{i}\Big|_0^{\pi} = e^{i\pi} - e^0 = \underline{\underline{-2}}$$

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

$c(0) = 1, \qquad c\left(\frac{\pi}{2}\right) = i.$

Beispiel: $f(z) = \underline{1 + z}, \qquad c(t) = \cos(t) + \mathrm{i}\cdot\sin^2(t), \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Wir werden gleich sehen, wie wir das hier viel einfacher berechnen können!

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(1 + \underbrace{\cos(t) + \mathrm{i}\cdot\sin^2(t)}_{= c(t)})}^{f(c(t))} \cdot \underbrace{(-\sin(t) + \mathrm{i}\cdot 2\sin(t)\cos(t))}_{= c'(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/2} -2\cos(t)\sin^3(t) - \cos(t)\sin(t) + \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

$$+ \mathrm{i}\cdot\int_0^{\pi/2} 2\cos^2(t)\sin(t) + 2\cos(t)\sin(t) - \sin^3(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\sin^4(t) + \frac{1}{2}\cos^2(t) + \cos(t)\right]_0^{\pi/2}$$

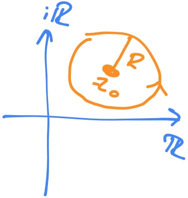
$$\cancel{+}\,\mathrm{i}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cos^3(t) - \cos^2(t) - \frac{1}{3}\cos^3(t) + \cos(t)\right]_0^{\pi/2} = \underline{-2 + \mathrm{i}.}$$

Nervig zu rechnen, aber inhaltlich nicht anders als eben.

Ein wichtiges Kurvenintegral:

Für $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$: $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \underbrace{z_0 + Re^{i\overset{t}{\varphi}}}_{=:c(t),}, \overset{t}{\varphi} \in [0, 2\pi)\}$.

$c'(t) = iRe^{it}$



Für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_\Gamma (z - z_0)^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (\cancel{z_0} + Re^{it} - \cancel{z_0})^n \cdot iRe^{it}\, dt$$

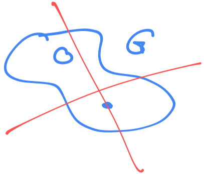
$$= \int_0^{2\pi} R^n e^{int} \cdot iRe^{it}\, dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt$$

Für $n = -1$: $\int_\Gamma (z - z_0)^{-1} dz = i \cdot R^0 \cdot \int_0^{2\pi} e^{0 \cdot t}\, dt = 2\pi i$

Unabhängig von z_0, R!

Für $n \neq -1$: $\int_\Gamma (z - z_0)^n dz = \frac{iR^{n+1}}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0.$

Der **Cauchysche Integralsatz**



keine Löcher

Es seien

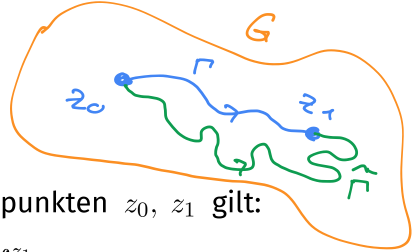
- $G \subset \mathbb{C}$ ein **einfach zusammenhängendes Gebiet**,
- f eine auf G **analytische Funktion**.

$\Gamma = \{c(t) \mid t \in [a,b]\}$: $c(a) = c(b)$.

Dann gilt:

- Für alle **geschlossenen Kurven** Γ ist

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



- Das Kurvenintegral ist **wegunabhängig**:
  Für alle Kurven $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ in G mit den selben Endpunkten $z_0,\ z_1$ gilt:

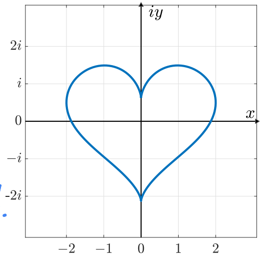
$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\tilde{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z \;=:\; \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Wenn alle Bedingungen erfüllt sind, müssen wir fast gar nicht rechnen.

Beispiel: $f(z) = \dfrac{\exp(z^2)}{2\pi \mathrm{i}} + z - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$

Alle Bausteine analytisch.

Komposition analytischer Funktionen,
analytisch auf $G = \mathbb{C}$ ← einfach zusammenhängend.



$$c(t) = 2\sin^3(t) + \mathrm{i} \cdot \frac{1}{8}\left(13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t)\right), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Geschlossene Kurve: $c(0) = 0 + \mathrm{i} \cdot \dfrac{5}{8} = c(2\pi)$

$$\Rightarrow \qquad \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

ohne weitere Rechnung!

Stammfunktionen

Sei f analytisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G. Wenn F eine **Stammfunktion** von f ist, d.h. $F' = f$, dann gilt

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; F(z_1) - F(z_0).$$

Beispiel: $\quad f(z) = 1 + z, \qquad z_0 = 1, \quad z_1 = \mathrm{i}.$

Stammfunktion: $\quad F(z) \;=\; z + \dfrac{z^2}{2}.$ (Stammfunktion wie im Reellen)

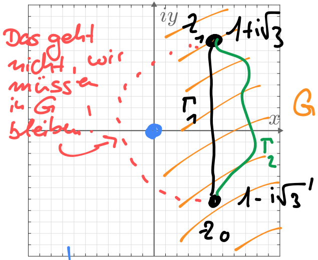
$$\int_1^{\mathrm{i}} (1+z)\,\mathrm{d}z \;=\; F(\mathrm{i}) - F(1) \;=\; \mathrm{i} - \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \; -2 + \mathrm{i}.$$

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\quad G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$

$\arg(z_0) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, $\quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$

$z_0 = 1 - \mathrm{i} \cdot \sqrt{3}$, $\quad z_1 = 1 + \mathrm{i} \cdot \sqrt{3}$

$|z_0| = (1^2 + \sqrt{3}^2)^{1/2} = \sqrt{4} = 2 = |z_1|$.



Stammfunktion auf G:

$\ln'(z) = \frac{1}{z}$

$F(z) = \ln(z)$ (Hauptzweig)

$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, $\quad \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2)$

$$\ln(z_0) = \ln(2) - \mathrm{i} \cdot \frac{\pi}{3}, \qquad \ln(z_1) = \ln(2) + \mathrm{i} \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln(z_1) - \ln(z_0) = \mathrm{i} \cdot \frac{2\pi}{3}.$$

Stammfunktionen per Kettenregel

Hat f die Form

$$f(z) \;=\; h(w(z))w'(z)$$

ist eine Stammfunktion gegeben durch $H(w(z))$, wobei H eine Stammfunktion von h ist, d.h. $H' = h$.

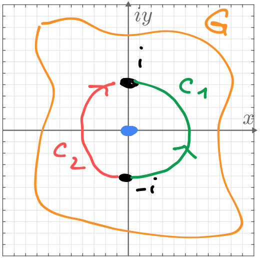
Beispiel: $f(z) \;=\; \sin(z^3) \cdot z^2 \;=\; \frac{1}{3}\sin(z^3) \cdot (3z^2)$

$$w(z) \;=\; z^3, \qquad h(w) \;=\; \frac{1}{3}\sin(w) \quad \Rightarrow \quad H(w) \;=\; -\frac{1}{3}\cos(w)$$

Stammfunktion: $F(z) \;=\; -\frac{1}{3}\cos(z^3)$.

Vorsicht, wenn G nicht einfach zusammenhängend ist!

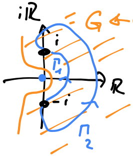
Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z}, \qquad z_0 = -i, \qquad z_1 = i$



$$c_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad c_1'(t) = i e^{it}$$

negative Orientierung

$$c_2(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}, \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \qquad c_2'(t) = -i e^{-it}$$



G ← einfach zusammenhängend

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, \mathrm{d}t \;=\; \mathrm{i} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}t = \mathrm{i} \cdot \pi.$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} \cdot (-\mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})\, \mathrm{d}t \;=\; -\mathrm{i} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}t = -\mathrm{i} \cdot \pi.$$

unterschiedliche Pfade liefern unterschiedliche Integrale.

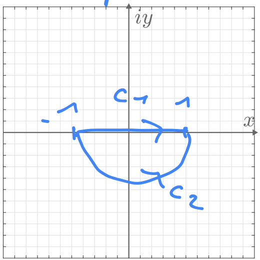
Alle Pfade in diesem Gebiet liefern das gleiche Integral, aber hier können wir nicht "links von 0" laufen.

Vorsicht, wenn f nicht analytisch ist!

Siehe erstes Beispiel.

nicht analytisch

Beispiel: $f(z) = |z|^2, \qquad z_0 = -1, \qquad z_1 = 1$



$c_1(t) = t, \quad t \in [-1, 1]$

$c_2(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in [\pi, 2\pi]$

$$\int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1 \, \mathrm{d}t \;=\; \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \;=\; \frac{2}{3}.$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} 1 \cdot (\mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \, \mathrm{d}t \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\Big|_{\pi}^{2\pi} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi} \;=\; 2.$$

Es kann auch im nichtanalytischen Fall 0 rauskommen, aber man muss es nachrechnen.

nicht analytisch.

Beispiel: $f(z) = \mathrm{Re}(z), \qquad c(t) = \sin(t)(1+\mathrm{i}), \qquad t \in [0, \pi]$

$c(0) = 0 = c(\pi)$: geschlossene Kurve

$$\int_0^\pi \sin(t) \cdot (\cos(t)(1+\mathrm{i})) \, \mathrm{d}t = (1+\mathrm{i}) \int_0^\pi \sin(t) \cos(t) \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1+\mathrm{i}}{2} \sin^2(t) \Big|_0^\pi = 0.$$

Welche Funktionen sind analytisch?

wenn Definitionsbereich von f und Bild von g verträglich.

Analytische Funktionen: Polynome, $e^z, \cos(z), \sin(z), \ldots$

Auch anayltisch (in geigneten Gebieten): $f+g, \quad f\cdot g, \quad f/g, \quad f\circ g$

$g \neq 0$ in G

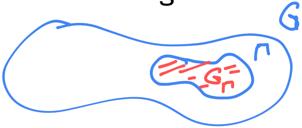
Nicht analytisch: $\mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(z), \quad \overline{z}, \quad |z|$

2. Die Cauchyschen Integralformeln

Etwas Notation

- Ist Γ eine geschlossene Kurve, schreiben wir für das Kurvenintegral oft auch

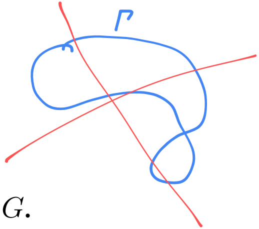
$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$



- Ist Γ eine geschlossene Kurve in einem Gebiet G, bezeichnen wir das Innere der von Γ umschlossenen Fläche mit G_Γ.
- Für einen positiv orientierten Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius $R > 0$ schreiben wir

$$\partial B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}.$$

Die Cauchy-Integralformeln



Es seien

- $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet,
- f eine auf G analytische Funktion,
- Γ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in G.

keine Schnitte mit sich selbst.

Dann gilt:

- Für alle $z_0 \in G_\Gamma$ ist

Extrem folgenreiches Resultat!

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = f(z_0).$$

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert die $n$te Ableitung $f^{(n)}$ in G und für alle $z_0 \in G_\Gamma$ ist

$$\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = f^{(n)}(z_0).$$

Damit können wir einige Kurvenintegrale sehr schnell berechnen!

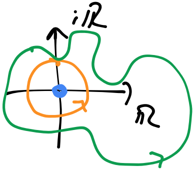
$f(z) = e^z$ analytisch auf $\mathbb{C}$

Beispiel: $$\oint_{\partial B_1(0)} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i \cdot f(z_0) = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i.$$

Umläuft $z_0 = 0$

Statt das Integral auszurechnen, müssen wir nur f bei z_0 auswerten!

Beachte: Das gilt für **jede** einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve Γ, die 0 umläuft. Nicht nur für Kreise mit Mittelpunkt 0!



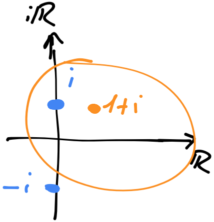
$f(z) = e^{2z}$ analytisch auf $\mathbb{C}$

Beispiel: $$\oint_{\partial B_1(3)} \frac{e^{2z}}{(z-3)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(z_0)$$

$$= 2\pi i \cdot 2e^{2\cdot 3} = 4\pi e^6 i.$$

$n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$

Manchmal müssen wir den Integranden erst umschreiben.



Beispiel:

$$\oint_{\partial B_2(1+i)} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial B_2(1+i)} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz$$

$$= \oint_{\partial B_2(1+i)} \frac{\overbrace{\left(1/(z+i)\right)}^{f(z) =:}}{(z-i)}\,dz = 2\pi i \cdot f(i)$$

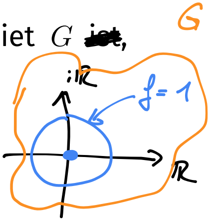
$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{i+i} = \pi.$$

i liegt im Inneren, $-i$ nicht. Wähle $z_0 = i$.

Es geht aber auch in die andere Richtung!

Angenommen, wir wissen folgendes über eine ansonsten unbekannte Funktion f:

- f ist analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G ~~ist~~, das den Einheitskreis enthält,
- es gilt $f(z) = 1$ für $|z| = 1$.



Können wir sagen, was $f(0)$ ist?

Für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ könnten wir hier nichts aussagen.
Für $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aber sehr viel!

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi \mathrm{i} = 1.$$

Wenn wir f auf $\partial B_1(0)$ kennen, kennen wir f auch im Inneren!

Maximumsprinzip: $f \equiv 1$ auf $B_1(0)$.

Das Maximumsprinzip

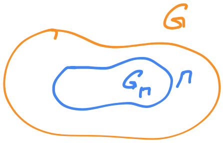
Fast genau so wie das Maximumsprinzip für harmonische Funktionen (DGL II).

Es sei f analytisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und stetig auf dem Abschluss $\overline{G}$.

Dann gilt:

- $|f|$ nimmt sein Maximum auf dem Rand von G an.
- Falls $|f|$ sein Maximum im Inneren von G annimmt, ist f konstant.

Insbes.: Γ geschlossene Kurve in G



$\Rightarrow \max_{z \in \overline{G_\Gamma}} |f(z)| = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$,

$|f(z)| \le \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$ für alle $z \in G_\Gamma$.