

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung 4:

Komplex differenzierbare Funktionen,
Cauchy-Riemann Differentialgleichungen,
analytische Funktionen, konforme Abbildungen

1. Komplexe Ableitungen und die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Zur Erinnerung: Ableitungen in $\mathbb{R}^2$.

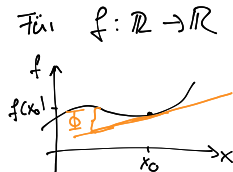
Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0)^\top \in D$, sowie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$.

Dann ist f in $(x_0, y_0)^\top$ **(total) differenzierbar**, falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und eine Funktion $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ existieren, mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + A \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] + \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$\lim_{(x,y)^\top \rightarrow (x_0,y_0)^\top} \frac{\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Zur Erinnerung: Ableitungen in $\mathbb{R}^2$.

Wenn f in $(x_0, y_0)^\top$ differenzierbar ist, ist A gegeben durch die Jacobi-Matrix.

$$A = Jf \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = Df \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Wenn die Komponenten f_1, f_2 von f in $(x_0, y_0)^\top$ stetig partiell differenzierbar sind, dann ist f in $(x_0, y_0)^\top$ total differenzierbar.

Ableitungen in $\mathbb{C}$.

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, sowie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, für $z = x + iy$.

Dann ist f in z_0 **(komplex) differenzierbar**, falls eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $\Phi : D \rightarrow \mathbb{C}$ existieren, mit

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot [z - z_0] + \Phi(z)$$

$$a = f'(z_0)$$

und

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Phi(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

Wir brauchen stärkere Bedingungen an u und v .

Hier reicht es **nicht**, wenn u und v stetig partiell differenzierbar sind.
Zusätzlich müssen die **Cauchy-Riemann Differentialgleichungen** erfüllt sein:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Wz:

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Es gilt: $f = u + iv$, mit u, v stetig partiell differenzierbar, ist genau dann in z_0 (komplex) differenzierbar, wenn die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in z_0 erfüllt sind.

In diesem Fall ist die komplexe Ableitung gegeben durch

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0).$$

$\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen sind strenger als $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen in $\mathbb{R}^2$.

Ist $a = f'(z_0) \in \mathbb{C}$, bedeutet $a \cdot z$ eine Drehstreckung.

Eine Drehstreckung in $\mathbb{R}^2$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\alpha} & \underline{-\beta} \\ \underline{\beta} & \underline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen sagen, dass die Jacobi-Matrix der Abbildung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ eine Drehstreckung in $\mathbb{R}^2$ beschreibt:

$$D \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u_x(x_0, y_0)} & \underline{u_y(x_0, y_0)} \\ \underline{v_x(x_0, y_0)} & \underline{v_y(x_0, y_0)} \end{pmatrix}$$

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Beispiel: $f(z) = \ln(z)$ (Hauptzweig), $z = x + iy$ mit $x > 0$.

$$f(z) = \ln(|z|) + i \arg(z) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ u_y(x, y) &= \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ v_x(x, y) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \\ v_y(x, y) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \arctan'(t) \\ &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

$$f'(z) = u_x(x, y) + i \cdot v_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{z}.$$

Beispiel: $f(z) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = \underbrace{xy}_{u(x,y)} + \underbrace{0 \cdot i}_{v(x,y)}, \quad z = x + iy$

$$\left. \begin{array}{l} u_x = y, \quad u_y = x \\ v_x = 0 = v_y \end{array} \right\}$$

Cauchy-Riemann: $u_x = y \stackrel{!}{=} v_y = 0 \Rightarrow y = 0$
 $u_y = x \stackrel{!}{=} -v_x = 0 \Rightarrow x = 0$

f ist nur in $z_0 = 0$ diff. bew. $f'(0) = 0$.

Beispiel: $f(z) = (\bar{z})^2$

Wir wissen schon: $z \mapsto \bar{z}$ ist nirgends diff. bew.

$$f(z) = (x - iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u - \underbrace{2xy}_v \cdot i$$

$$\left. \begin{array}{l} u_x = 2x, \quad u_y = -2y \\ v_x = -2y, \quad v_y = -2x \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_x = v_y \Rightarrow x = 0 \\ u_y = -v_x \Rightarrow y = 0 \end{array}$$

Quadrieren "gewinnt" Diff. bew. in $z_0 = 0$

Funktionen, die direkt auf $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$ zugreifen, sind typischerweise nicht (überall) diff. bew.

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in Polarkoordinaten

Ist $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $r_0 > 0$ in Polarkoordinaten gegeben und $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + i \cdot v(r, \varphi)$$

so lauten die **Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in Polarkoordinaten**:

$$u_r(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{r_0} v_\varphi(r_0, \varphi_0), \quad u_\varphi(r_0, \varphi_0) = -r_0 v_r(r_0, \varphi_0).$$

Ist f in z_0 differenzierbar, so gilt

$$f'(z_0) = e^{-i\varphi_0} (u_r(r_0, \varphi_0) + i v_r(r_0, \varphi_0)).$$

Beispiel: $f(z) = z^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \neq 0.$

$$f(z) = r^k e^{ik\varphi} = r^k \cos(k\varphi) + i \cdot r^k \sin(k\varphi).$$

{ Einige Ableitungen sind
so wie im Reellen:
 $\ln'(z) = \frac{1}{z}, \quad \exp'(z) = \exp(z)$
 $(z^k)' = k z^{k-1}, \dots$

$$\left. \begin{array}{ll} u_r(r, \varphi) = \underline{kr^{k-1} \cos(k\varphi)} & u_\varphi(r, \varphi) = \underline{-kr^k \sin(k\varphi)} \\ v_r(r, \varphi) = \underline{kr^{k-1} \sin(k\varphi)} & v_\varphi(r, \varphi) = \underline{kr^k \cos(k\varphi)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{u_r} = \frac{1}{r} \underline{v_\varphi} \quad \checkmark \\ \underline{u_\varphi} = -r \underline{v_r} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

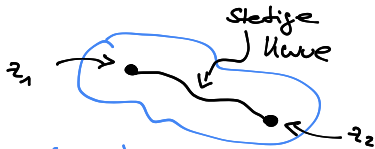
$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-i\varphi} (u_r(r, \varphi) + i \cdot v_r(r, \varphi)) = e^{-i\varphi} (kr^{k-1} \cos(k\varphi) + i \cdot kr^{k-1} \sin(k\varphi)) \\ &= kr^{k-1} e^{-i\varphi} \cdot e^{ik\varphi} = kr^{k-1} e^{i(k-1)\varphi} = kz^{k-1}. \end{aligned}$$

2. Analytische Funktionen

Ein paar Vokabeln zum Thema **analytische Funktionen**



nicht zusammenhängend



(path-) zusammenhängend

- Ein **Gebiet** $G \subset \mathbb{C}$ ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge.

Je nach Kontext fassen wir G manchmal als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auf.

- Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **analytisch** oder **holomorph** auf einem Gebiet G , falls f in jedem Punkt $z \in G$ komplex differenzierbar ist.

- Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **harmonisch** auf einem Gebiet G , falls f in jedem Punkt $z \in G$ die Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllt ist.

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen sind harmonisch.

Es seien

- $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet;
- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, für $z = x + iy \in D$;
- u, v zweimal stetig differenzierbar.

Dann gilt:

Cauchy -
Riemann

Satz von

Schwarz $u_{xy} = v_{yx}$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{xy} - v_{xy} = 0,$$

und analog $\Delta v = 0$.

Konjugiert harmonische Funktionen

Sei G ein Gebiet und u harmonisch auf G . Dann gibt es eine auf G harmonische Funktion v , sodass $f = u + iv$ auf G analytisch ist. Wir nennen v die zu u **konjugiert harmonische** Funktion.

Zu einem gegebenen harmonischen u finden wir die zugehörigen konjugiert harmonischen Funktionen, indem wir das aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen entstehende Potentialproblem lösen. D.h. wir finden ein v mit

$$v_x(x, y) = -u_y(x, y), \quad v_y(x, y) = u_x(x, y).$$

Beispiel: $u(x, y) = y^3 + 3x^2y - y$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6y + 6y = 12y \neq 0 \rightarrow \text{nicht harmonisch}$$

Kann nicht Realteil einer analytischen Funktion sein.

Beispiel: $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x$

$$\Delta u = 6x - 6x = 0$$

Konjugiert harmonisches v :

$$u_x \stackrel{!}{=} -u_y = 6xy \Rightarrow v(x, y) = 3x^2y + k(y)$$

$$v_y = 3x^2 + k'(y) \stackrel{!}{=} u_x = 3x^2 - 3y^2 + 1 \Rightarrow h'(y) = -3y^2 + 1$$

$$\Rightarrow k(y) = -y^3 + y + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v(x, y) = 3x^2y - y^3 + y + c \quad \Rightarrow f(z) = (x^3 - 3xy^2 + x) + i(-y^3 + 3x^2y + y + c)$$

Für $c = 0$: $f(z) = z^3 + z$

3. Konforme Abbildungen

Konforme Abbildungen sind **winkeltreu** und lassen sich durch ihre Ableitung charakterisieren.

Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow W \subset \mathbb{C}$, unter der alle Winkel (inklusive deren Orientierung) erhalten bleiben, nennt man **winkeltreu** bzw. **konform**.

Eine analytische Funktion $f : D \rightarrow W$, ist in jedem Punkt $z_0 \in D$ mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.

Sei $f : D \rightarrow W$ in $z_0 \in D$ konform. Weiterhin seien Real- und Imaginärteil $u(z)$ und $v(z)$ von $f = u + iv$ in einer Umgebung von z_0 stetig differenzierbar. Dann ist f komplex differenzierbar mit $f'(z_0) \neq 0$.

Beispiel: $f(z) = z^2$, $f'(z) = 2z \neq 0$ für $z \neq 0$ • konform für $z \neq 0$.

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t + i, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

$$z^2 = (t^2 - 1) + i \cdot 2t$$

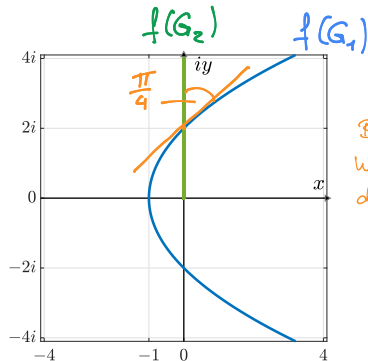
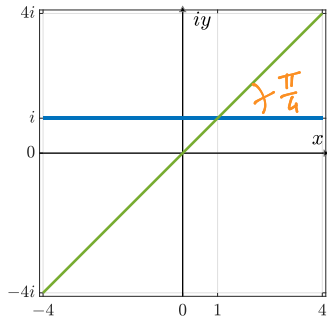
$$c_1(t) = t + i$$

Schnittpunkt
bei $t = 1$

$$G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t(1 + i), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

$$z^2 = 2t^2 i$$

$$c_2(t) = t(1 + i)$$



Betrachte den
Winkel zwischen
den Tangenten!

Gebietstransformationen durch konforme Abbildungen

Beispiel: $T(z) = \frac{3z - 15}{z + 5}$, $G_1 = i\mathbb{R}$, $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = -5\}$

HA: Möbius-Transformationen sind konform.

(1) $-5 \in G_2 \Rightarrow T(G_2)$ Gerade. $T(-5+i) = \frac{-15+3i-15}{i} = 3+30i$
 $T(-5-i) = \frac{-15-3i-15}{-i} = 3-30i$
 $\Rightarrow T(G_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 3\}$

(2) $-5 \notin G_1 \Rightarrow T(G_1)$ echter Kreis.
5 ist symm. zu -5 bzgl. $G_1 \Rightarrow T(5)$ symm. zu $T(-5)$
bzgl. $T(G_1)$

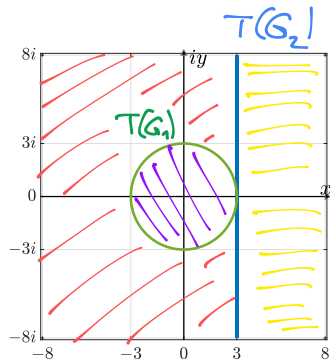
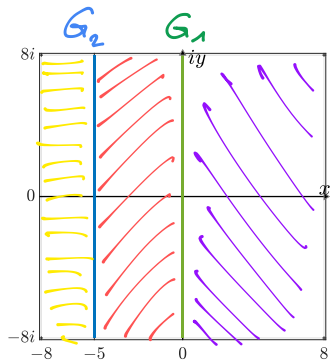
$T(5) = 0$, $T(-5) = \infty \Rightarrow 0$ ist Mittelpunkt.

Radius: $R = |T(0) - 0| = |-3| = 3$, da $0 \in G_1$.

$$T(z) = \frac{3z - 15}{z + 5}$$

$T(-1) = \frac{-3 - 15}{4} = -\frac{9}{2}$: links von $T(G_2)$
 außerhalb $T(G_1)$

$T(1) = \frac{3 - 15}{6} = -2$: innerhalb von $T(G_1)$



Konstruktion geeigneter Transformationen

Beispiel: Bilde

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0, \quad x^2 + y^2 < 1\}$$

durch eine Möbiustransformation auf

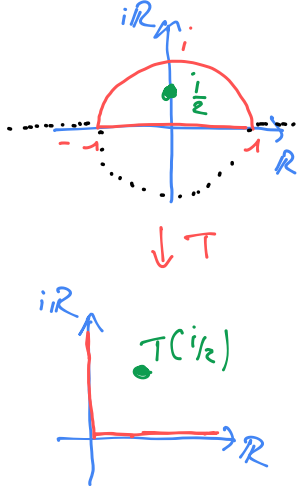
$$Q = \{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid u > 0, \quad v > 0\}.$$

(1) Schiebe eine Ecke von D auf 0 und eine auf ∞ : $T(-1) = 0, \quad T(1) = \infty$

$$\Rightarrow T(z) = \alpha \frac{z+1}{z-1}$$

(2) Schiebe den oberen Rand von D auf die obere imaginäre Halbachse: $T(i) = i \Rightarrow \alpha \frac{i+1}{i-1} = i \Rightarrow \alpha = -1$.

$$\Rightarrow T(z) = \frac{1+z}{1-z}. \quad T(i/2) = \frac{2+i}{2-i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \quad \text{oben rechts.}$$



Lösung der Laplace-Gleichung

Beispiel: Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung:

$$\begin{array}{lll} \Delta f(x, y) = 0 & \text{für} & y > 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 < 1, \\ f(x, 0) = 0 & \text{für} & x \in (-1, 1), \quad \text{und} \quad y = 0, \\ f(x, y) = 1 & \text{für} & y > 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 1. \end{array}$$

Lösungsstrategie:

1. Transformiere auf ein „einfacheres“ Gebiet;
2. Löse die Gleichung in dem einfacheren Gebiet;
3. Transformiere die Lösung zurück.

Transformation auf ein einfacheres Gebiet

Wir haben eben schon gesehen: Die Halbkreisscheibe

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in (-1, 1), \quad x^2 + y^2 < 1\}$$

wird durch die Möbius-Transformation $T(z) = (1+z)/(1-z)$ konform auf den Quadranten

$$Q = \{w = u+iv \in \mathbb{C} \mid u > 0, \quad v > 0\} = \left\{w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

abgebildet.

Lösung auf dem einfacheren Gebiet

Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten: $\cancel{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0.$

Randdaten: $g(r, 0) = 0, \quad g(r, \pi/2) = 1.$

→ Hängt nicht von r ab!
Suche Lösung, die
nur von φ abhängt!

Lösung: $g(r, \varphi) = \frac{2}{\pi} \varphi = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{v}{u}\right).$

Rücktransformation der Lösung

Mit

$$w(z) = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2}$$

und

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(w(z)) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}, \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(w(z)) = \frac{2y}{(1-x)^2+y^2} :$$

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{v(x, y)}{u(x, y)} \right) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{2y}{1-x^2-y^2} \right).$$