SoSe 2025

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 3:

Der komplexe Logarithmus, die Joukowski-Funktion, Möbius-Transformationen

Claus R. Goetz

Universität Hamburg • Fachbereich Mathematik

1. Der komplexe Logarithmus

Der komplexe Logarithmus ist eine **menegenwertige** Funktion, von der wir meistens den **Hauptwert** betrachten.

$$e^{\log(|z|) + i(\arg(z)+2k\pi)}$$
$$= e^{\log(|z|)} \cdot e^{i(\arg(z)+2k\pi)}$$
$$= |z| \cdot e^{i(\arg(z)+2k\pi)} = z$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}, \quad z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$:

$$\left\{ \; \mathrm{Log}(z) \; \right\} = \left\{ \; \log(|z|) \; + \; \mathrm{i}\,(\arg(z) + 2k\pi) \; \middle| \; k \in \mathbb{Z} \; \right\}.$$

Für $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ nennen wir $\log(|z|) + \mathrm{i}\arg(z)$ den **Hauptwert** des komplexen Logarithmus.

Die Funktion

$$\ln(z) = \mathrm{Log}(z) = \log(|z|) + \mathrm{i}\arg(z), \qquad \text{mit} \quad \arg(z) \in (-\pi, \pi),$$

heißt **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus.

Oft schreibt man hierfür auch $\ln(z)$.

Hauptwert

Beispiel: $z \in \mathbb{R},\ z > 0$: $\quad \operatorname{Log}(z) = \log(z)$ (reeller Logarithmus).

Beispiel: $z_1 = \sqrt{2}(-1 + \mathrm{i}), \quad z_2 = 3\mathrm{i}, \quad z_3 = -4\mathrm{i}.$

$z_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow \{\operatorname{Log}(z_1)\} = \{\underbrace{\log(2) + i\left(\frac{3\pi}{4}\right.}_{\text{Hauptwert.}} + 2k\pi\left.\right) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ab jetzt: Nur noch Hauptwerte!

$z_2 = 3e^{i\pi/2} \Rightarrow \operatorname{Log}(z_2) = \log(3) + i\frac{\pi}{2}$

$z_3 = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \operatorname{Log}(z_3) = \log(4) + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Beispiel: $z_1 = 2\exp\left(\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right), \qquad z_2 = 3\mathrm{i}, \qquad z_3 = -4\mathrm{i}.$

Argument nicht in $(-\pi, \pi)$!

$$z_1 \cdot z_2 = 6\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\right) = 6\exp\left(\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \log(6) + \mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) \qquad \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log\left(\frac{2}{3}\right) + \mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}$$

$$z_1 \cdot z_3 = 8\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) \qquad \operatorname{Log}(z_1 \cdot z_3) = \log(8) + \mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{1}{2}\exp\left(\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) \qquad \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_3}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Vorsicht mit den Rechenregeln aus dem Reellen!

Sie lassen sich nicht einfach aufs Komplexe übertragen!

Für den **reellen Logarithmus** gilt mit $a, b > 0$:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b), \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b).$$

Für den **Hauptwert des komplexen Logarithmus** gelten diese Regeln i.A. nicht!

I.A. ist $\quad \operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$

Aber es gilt natürlich trotzdem:

$$\exp\left(\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)\right) = \exp\left(\operatorname{Log}(z_1)\right) \cdot \exp\left(\operatorname{Log}(z_2)\right) = z_1 \cdot z_2.$$

Es ist $\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2) \in \{\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2)\}$

Wir hatten eben berechnet:

$$\mathrm{Log}(z_1) = \log(2)+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}, \qquad \mathrm{Log}(z_2) = \log(3)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{Log}(z_3) = \log(4)+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$\log(2) + \log(3) = \log(2\cdot 3) = \log(6)$

Damit:

De Teil passt imme

Hie kann ein Untoschied sein

$$\mathrm{Log}(z_1\cdot z_2) = \log(6) - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4} \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) = \log(6) + i\,\frac{5\pi}{4}$$

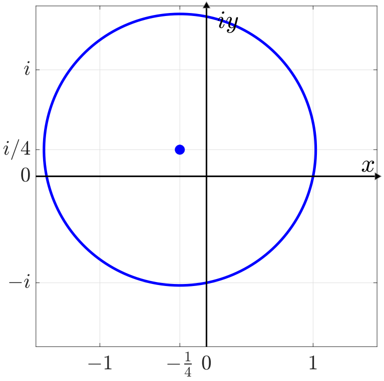
$$\mathrm{Log}(z_1\cdot z_3) = \log(8) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_3) = \log(8) + i\,\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Log}(z_1/z_2) = \log\left(\frac{2}{3}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} = \mathrm{Log}(z_1) - \mathrm{Log}(z_2) = \log\left(\frac{2}{3}\right) + i\,\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Log}(z_1/z_3) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4} \neq \mathrm{Log}(z_1) - \mathrm{Log}(z_3) = \log\left(\frac{1}{2}\right) + i\,\frac{5\pi}{4}$$

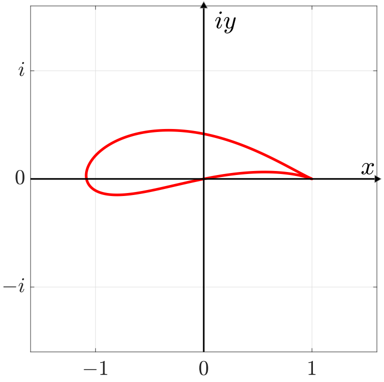
2. Die Joukowski-Funktion

Die Joukowski-Funktion hat Anwendungen in der Aerodynamik.



$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\longrightarrow$$



$z_0 = -\frac{1}{4}(-1 + \mathrm{i}), \quad r_0 = \frac{\sqrt{26}}{4}$

1 liegt auf dem Kreis,
-1 im Inneren

Hat Ähnlichkeiten zum Querschnitt einer Tragfläche.

Real- und Imaginärteil der Joukowski-Funktion

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad z \neq 0.$$

$$\frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

mit

$$z = re^{i\varphi}, \qquad w = u + iv$$

erhalten wir:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\varphi), \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\varphi).$$

Bzw. für $z = x + iy$: $x = r\cos(\varphi),\ y = r\sin(\varphi),$ $\quad \frac{1}{r} = \frac{r}{r^2}$

$$u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right), \qquad v = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{\underbrace{x^2+y^2}_{=r^2}}\right).$$

Bilder von Kreisen

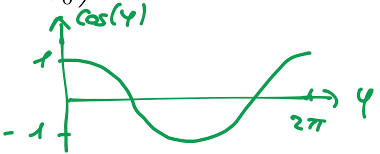
$E = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$\Rightarrow f(E) = [-1, 1]$

Mit festem $\quad r = r_0, \quad \varphi \in [0, 2\pi):$

$$u = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos(\varphi), \qquad v = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)\sin(\varphi).$$

Für $\quad r_0 = 1: \qquad u = \cos(\varphi), \qquad v = 0.$



Das Intervall $[-1,1]$ wird doppelt durchlaufen

Für $\quad r_0 \neq 1:$

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(r_0 + \frac{1}{r_0})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(r_0 - \frac{1}{r_0})^2} = 1.$$

$$= \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1$$

Bilder von Strahlen

$g(\mathbb{R}_+) = [1,\infty)$

Mit festem $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, $r > 0$:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\varphi_0), \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\varphi_0).$$

Untersuche die Funktionen:

$g'(r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2r^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r = 1,$

$g''(r) = \frac{1}{r^3} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $g(1) = 1$

$\lim_{r \to \infty} g(r) = \infty = \lim_{r \to 0} g(r)$

$\lim_{r \to \infty} h(r) = \infty$

$$g(r) := \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right):$$

$\lim_{r \to 0} h(r) = -\infty$

$\Rightarrow f(i\mathbb{R}_+) = i\mathbb{R}.$

$$h(r) := \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right):$$

Für $\varphi_0 = 0$, $f(\mathbb{R}_+) = [1,\infty)$

Zur inversen Joukowski-Funktion

Die Joukowski-Funktion ist auf dem Einheitskreis nicht invertierbar, da

$$f(\mathrm{e}^{i\varphi}) \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right) \;=\; f(e^{-\mathrm{i}\varphi}).$$

Für $|z| > 1$ können wir die Umkehrfunktion direkt ausrechnen:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - 2wz + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = w \pm \sqrt{w^2 - 1},$$

wobei wir jeweils den Zweig der wählen, der $|z| > 1$ liefert.

3. Möbius-Transformationen

Die erweiterte komplexe Zahlenebene, verallgemeinerte Kreise

Wir fügen der komplexen Zahlenebene den **„unendlich fernen Punkt“** ∞ hinzu und definieren $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ein **verallgemeinerter Kreis** in $\mathbb{C}^*$ ist entweder

- ein (echter) Kreis in $\mathbb{C}$,
- eine Gerade durch ∞.

Alle Geraden haben den gemein-
samen Punkt ∞.

Möbius-Transformationen

Eine **Möbius-Transformation** ist eine Funktion

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \qquad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit

$$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}, \qquad \text{und} \qquad \underline{ad - bc} \neq 0.$$

↳ Zähler und Nenner haben verschiedene NST

Sind $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1,\ w_2,\ w_3 \in \mathbb{C}^*$, jeweils paarweise verschieden, so ist T durch die **Interpolationsbedingung**

$$T(z_j) = w_j, \qquad j = 1, 2, 3,$$

eindeutig festgelegt.

Besonders einfach ist es, wenn **Nullstelle** und **Polstelle** bekannt sind.

Sind z_1 und z_2 gegeben mit $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = \infty$, so hat T die Form

$$T(z) = \alpha \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Beispiel:

$$T(\mathrm{i}) = 0, \qquad T(-2\mathrm{i}) = \infty, \qquad T(2) = 3 + \mathrm{i} \qquad \Rightarrow \qquad T(z) = \alpha \cdot \frac{z - \mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}.$$

Finde α :

$$T(2) = \alpha \cdot \frac{2 - \mathrm{i}}{2 + 2\mathrm{i}} = \frac{\alpha}{4}(2 - \mathrm{i})(2 - 2\mathrm{i})$$

$$= \frac{\alpha}{4}(1 - 3\mathrm{i}) \overset{!}{=} 3 + \mathrm{i} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 4\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \qquad T(z) = \frac{4\mathrm{i} \cdot z + 4}{z + 2\mathrm{i}}.$$

Wir können die interpolierende Möbius-Transformation auch durch die **Dreipunktformel** finden.

Zu jeweils paarweise verschiedenen $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1,\ w_2,\ w_3 \in \mathbb{C}^*$, löse

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

nach w auf und setze $T(z) = w$.

Dann erfüllt T die Bedingungen

$$T(z_j) = w_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Wir können die interpolierende Möbius-Transformation auch durch die **Dreipunktformel** finden.

Beispiel: $z_1 = 0, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -1 + \mathrm{i},$
$w_1 = 0, \quad w_2 = 4, \quad w_3 = 2 + 2\mathrm{i}.$

Einsetzen in die Dreipunktformel:

$$\frac{w - 0}{w - 4} : \frac{(2+2\mathrm{i}) - 0}{(2+2\mathrm{i}) - 4} = \frac{z - 0}{z - (-2)} : \frac{(-1+\mathrm{i}) - 0}{(-1+\mathrm{i}) - (-2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{w}{w - 4} : \frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1} = \frac{z}{z+2} : \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad w(z+2) = z(w-4)\underbrace{\frac{(\mathrm{i}+1)^2}{(\mathrm{i}-1)^2}}_{=-1} \quad \Leftrightarrow \quad wz + 2w = 4z - wz$$

$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{2z}{z+1} := T(z).$$

Möbius-Transformationen sind **kreistreu**.

Es seien:

- $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0,$ eine Möbius-Transformation;
- $K \subset \mathbb{C}^*$ ein verallgemeinerter Kreis.

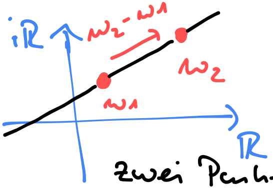
$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{a\left(-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(-\frac{d}{c}+d\right)} = \frac{k}{0} = \infty$$

Dann gilt dir **Kreistreue**:

- $-\dfrac{d}{c} \in K \qquad \Rightarrow \qquad T(K)$ ist eine Gerade.
- $-\dfrac{d}{c} \notin K \qquad \Rightarrow \qquad T(K)$ ist ein echter Kreis.

$\Big\}$ $T(K)$ ist ein verallg. Kreis.

Wie finden wir die Bilder verallgemeinerter Kreise?



zwei Punkte bestimmen eine Gerade

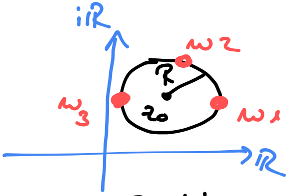
Falls $\quad -\dfrac{d}{c} \in K \quad$ (Bild ist eine Gerade):

- Wähle $\quad z_1,\ z_2 \in K$, berechne $\quad w_1 = T(z_1),\ w_2 = T(z_2)$;
- Bildgerade: $\quad T(K) = \{w \in \mathbb{C} \mid w = w_1 + \alpha(w_2 - w_1),\ \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$.

Oft geht es einfacher: Symmetrien auszunutzen!

Wie finden wir die Bilder verallgemeinerter Kreise?

Falls $\quad -\dfrac{d}{c} \notin K \quad$ (Bild ist ein echter Kreis):



Drei Punkte bestimmen einen Kreis.

- Wähle $\quad z_1,\; z_2,\; z_3 \in K,\quad$ berechne
  $w_1 \;=\; T(z_1),\; w_2 \;=\; T(z_2),\; w_3 \;=\; T(z_3);$
- Löse

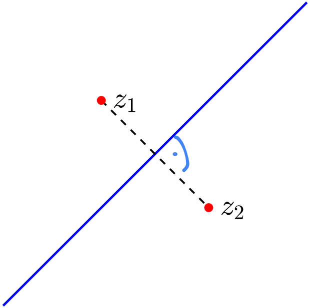
  $$(1) \quad |w_1 - w_0|^2 \;=\; R^2, \qquad (2) \quad |w_2 - w_0|^2 \;=\; R^2, \qquad (3) \quad |w_3 - w_0|^2 \;=\; R^2$$

  nach $\quad w_0 = u_0 + \mathrm{i} v_0 \quad$ und R auf.
- Bildkreis: $\quad T(K) \;=\; \{w \in \mathbb{C} \;\mid\; |w - w_0| = R\}.$

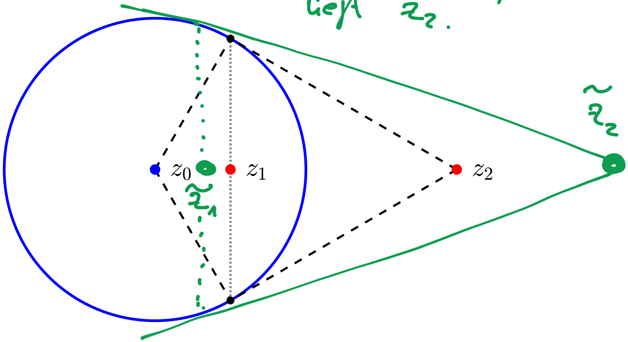
Oft geht es einfacher: Symmetrien auszunutzen!

Symmetrie bzgl. verallgemeinerter Kreise

Je näher z_1 und z_0, desto weiter draußen liegt z_2.



Symmetrie bzgl. einer Geraden: Spiegelung



Symmetrie bzgl. eines Kreises mit Mittelpunkt z_0 und Radius R:

$$(z_1 - z_0)(\overline{z_2} - \overline{z_0}) = R^2.$$

Wir vereinbaren: z_0 ist symmetrisch zu ∞.

Möbius-Transformationen **erhalten Symmetrien** bzgl. verallgemeinerter Kreise.

Es seien:

- $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ eine Möbius-Transformation;
- $K \subset \mathbb{C}^*$ ein verallgemeinerter Kreis;
- $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}^*$.

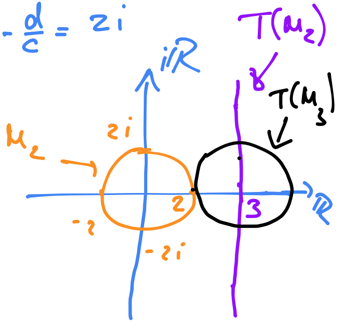
Dann gilt die **Symmetrieerhaltung**:

$$z_1,\ z_2 \quad \text{symmetrisch bzgl.} \quad K$$

$$\Rightarrow \quad T(z_1),\ T(z_2) \quad \text{symmetrisch bzgl.} \quad T(K)$$

Beispiel: Möbius-Transformation $T(z) = \dfrac{4z - 4i}{z - 2i}$

$-\frac{d}{c} = 2i$



M_1: imaginäre Achse

$2i \in M_1 \Rightarrow T(M_1)$ ist eine Gerade

$T(iy) = \dfrac{4iy - 4i}{iy - 2i} = \dfrac{4y - 4}{y - 2}$: alle Koeff. reell

$\Rightarrow T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

M_2: Kreis $|z| = 2$

$2i \in M_2 \Rightarrow T(M_2)$ ist eine Gerade

M_2 symm. bzgl. $M_1 \Rightarrow T(M_2)$ symm. bzgl. $T(M_1) = \mathbb{R}$

$\Rightarrow T(M_2)$ senkrecht auf $\mathbb{R}$ (d.h. parallel zu $i\mathbb{R}$)

$-2i \in M_2$, $T(-2i) = \dfrac{-8i - 4i}{-2i - 2i} = \dfrac{-12i}{-4i} = 3$

$\Rightarrow T(M_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) = 3\}$

M_3: reelle Achse

$2i \notin M_3 \Rightarrow T(M_3)$ echter Kreis.

M_3 symm. zu M_1 und M_2 $\Rightarrow T(M_3)$ symm zu $T(M_1)$ und $T(M_2)$ $\Rightarrow$ Mittelpunkt bei 3

$0 \in M_3 \Rightarrow R = |T(0) - 3| = \left|\frac{-4i}{-2i} - 3\right| = 1.$

Beispiel: Möbius-Transformation $T(z) = \dfrac{3z - \mathrm{i}}{z + 5\mathrm{i}}$ $\quad -\frac{d}{c} = -5i$

M: Kreis $|z - 4i| = 3$, $-5i \notin M \Rightarrow T(M)$ echter Kreis.

Sei $w_* = T(z_*)$ Mittelpunkt von $T(M)$. Dann ist $T(-5i) = \infty$ symm. zu $T(z_*) = w_*$ bzgl. $T(M)$

$\Rightarrow -5i$ symm zu z_* bzgl. M

$\Rightarrow 9 = (z_* - 4i)\overline{(5i + 4i)} = (z_* - 4i)(9i) \Rightarrow z_* - 4i = -i \Rightarrow z_3 = 3i.$

$R^2 = (z_* - z_0)(\overline{-5i} - \overline{z_0})$

$\Rightarrow w_* = T(3i) = \dfrac{9i - i}{3i + 5i} = \dfrac{8i}{8i} = 1.$

Radius: $i \in M \Rightarrow R = |T(i) - 1| = \left|\dfrac{3i - i}{i + 5i} - 1\right| = \left|\dfrac{2i}{6i} - 1\right|$

$= \left|\dfrac{1}{3} - 1\right| = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow T(M) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = \frac{2}{3} \}.$