Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

SoSe 2025

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 3:

Der komplexe Logarithmus, die Joukowski-Funktion, Möbius-Transformationen

Claus R. Goetz

Universität Hamburg • Fachbereich Mathematik

1. Der komplexe Logarithmus

Der komplexe Logarithmus ist eine **menegenwertige** Funktion, von der wir meistens den **Hauptwert** betrachten.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}, \quad z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg(z)}$:

$$\left\{ \ \mathrm{Log}(z) \ \right\} = \left\{ \ \log(|z|) \ + \ \mathrm{i} \left(\arg(z) + 2k\pi \right) \ \middle| \ k \in \mathbb{Z} \ \right\}.$$

Für $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ nennen wir $\log(|z|) + \mathrm{i} \arg(z)$ den **Hauptwert** des komplexen Logarithmus.

Die Funktion

$$\mathrm{Log}(z) \ = \ \log(|z|) \ + \ \mathrm{i} \arg(z), \qquad \text{mit} \quad \arg(z) \in (-\pi, \pi),$$

heißt **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus.

Oft schreibt man hierfür auch $\ln(z)$.

Beispiel: $z \in \mathbb{R},\ z > 0$: $\quad \operatorname{Log}(z) = \log(z) \quad$ (reeller Logarithmus).

Beispiel: $z_1 = \sqrt{2}(-1 + \mathrm{i}), \qquad z_2 = 3\mathrm{i}, \qquad z_3 = -4\mathrm{i}.$

Beispiel: $z_1 = 2\exp\left(\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right), \qquad z_2 = 3\mathrm{i}, \qquad z_3 = -4\mathrm{i}.$

$$z_1 \cdot z_2 = 6\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_1 \cdot z_3 = 8\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{1}{2}\exp\left(\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Vorsicht mit den Rechenregeln aus dem Reellen!

Sie lassen sich nicht einfach aufs Komplexe übertragen!

Für den **reellen Logarithmus** gilt mit $a, b > 0$:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b), \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b).$$

Für den **Hauptwert des komplexen Logarithmus** gelten diese Regeln i.A. nicht!

I.A. ist $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$

Aber es gilt natürlich trotzdem:

$$\exp\left(\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)\right) = \exp\left(\operatorname{Log}(z_1)\right) \cdot \exp\left(\operatorname{Log}(z_2)\right) = z_1 \cdot z_2.$$

Wir hatten eben berechnet:

$$\mathrm{Log}(z_1) \ = \ \log(2)+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}, \qquad \mathrm{Log}(z_2) \ = \ \log(3)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{Log}(z_3) \ = \ \log(4)+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Damit:

$$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) \ = \ \log(6) - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4} \qquad \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) \ =$$

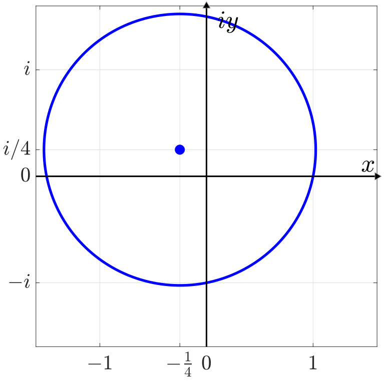
$$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_3) \ = \ \log(8) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} \qquad \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_3) \ =$$

$$\mathrm{Log}(z_1/z_2) \ = \ \log\left(\frac{2}{3}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} \qquad \mathrm{Log}(z_1) - \mathrm{Log}(z_2) \ =$$

$$\mathrm{Log}(z_1/z_3) \ = \ \log\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{i}\frac{\pi}{4} \qquad \mathrm{Log}(z_1) - \mathrm{Log}(z_3) \ =$$

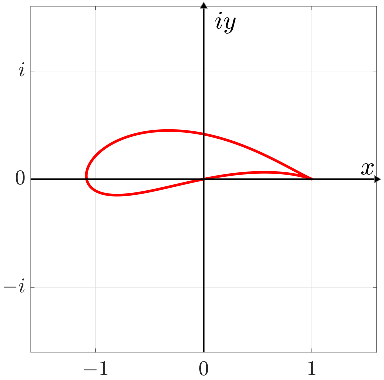
2. Die Joukowski-Funktion

Die Joukowski-Funktion hat Anwendungen in der Aerodynamik.



$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\longrightarrow$$



$z_0 = -\frac{1}{4}(-1 + \mathrm{i}), \quad r_0 = \frac{\sqrt{26}}{4}$

1 liegt auf dem Kreis,
-1 im Inneren

Hat Ähnlichkeiten zum Querschnitt einer Tragfläche.

Real- und Imaginärteil der Joukowski-Funktion

$$w \;=\; f(z) \;=\; \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad z \neq 0.$$

mit

$$z \;=\; r\mathrm{e}^{i\varphi}, \qquad w \;=\; u + \mathrm{i}v$$

erhalten wir:

$$u \;=\; \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\varphi), \qquad v \;=\; \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\varphi).$$

Bzw. für $z = x + \mathrm{i}y$:

$$u \;=\; \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right), \qquad v \;=\; \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Bilder von Kreisen

Mit festem $r = r_0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$:

$$u \;=\; \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos(\varphi), \qquad v \;=\; \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)\sin(\varphi).$$

Für $r_0 = 1$: $u = \cos(\varphi)$, $v = 0$.

Für $r_0 \neq 1$:

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(r_0 + \frac{1}{r_0})^2} \;+\; \frac{v^2}{\frac{1}{4}(r_0 - \frac{1}{r_0})^2} \;=\; 1.$$

Bilder von Strahlen

Mit festem $\varphi_0 \in [0, 2\pi), \qquad r > 0:$

$$u \;=\; \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\varphi_0), \qquad v \;=\; \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\varphi_0).$$

Untersuche die Funktionen:

$$g(r) \;:=\; \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right):$$

$$h(r) \;:=\; \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right):$$

Zur inversen Joukowski-Funktion

Die Joukowski-Funktion ist auf dem Einheitskreis nicht invertierbar, da

$$f(\mathrm{e}^{i\varphi}) \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right) \;=\; f(e^{-\mathrm{i}\varphi}).$$

Für $|z| > 1$ können wir die Umkehrfunktion direkt ausrechnen:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - 2wz + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = w \pm \sqrt{w^2 - 1},$$

wobei wir jeweils den Zweig der wählen, der $|z| > 1$ liefert.

3. Möbius-Transformationen

Die erweiterte komplexe Zahlenebene, verallgemeinerte Kreise

Wir fügen der komplexen Zahlenebene den **„unendlich fernen Punkt"** ∞ hinzu und definieren $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ein **verallgemeinerter Kreis** in $\mathbb{C}^*$ ist entweder

- ein (echter) Kreis in $\mathbb{C}$,
- eine Gerade durch ∞.

Möbius-Transformationen

Eine **Möbius-Transformation** ist eine Funktion

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \qquad T(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d}$$

mit

$$a,\ b,\ c,\ d\ \in \mathbb{C}, \qquad \text{und} \qquad ad - bc\ \neq\ 0.$$

Sind $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1,\ w_2,\ w_3 \in \mathbb{C}^*$, jeweils paarweise verschieden, so ist T durch die **Interpolationsbedingung**

$$T(z_j) \;=\; w_j, \qquad j \;=\; 1, 2, 3,$$

eindeutig festgelegt.

Besonders einfach ist es, wenn **Nullstelle** und **Polstelle** bekannt sind.

Sind z_1 und z_2 gegeben mit $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = \infty$, so hat T die Form

$$T(z) \;=\; \alpha \cdot \frac{z - z_1}{z - z_0}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Beispiel:

$$T(\mathrm{i}) \;=\; 0, \qquad T(-2\mathrm{i}) \;=\; \infty, \qquad T(2) \;=\; 3 + \mathrm{i} \qquad \Rightarrow \qquad T(z) = \alpha \cdot \frac{z - \mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}.$$

Finde α :

$$T(2) \;=\; \alpha \cdot \frac{2 - \mathrm{i}}{2 + 2\mathrm{i}} \;=\; \frac{\alpha}{4}(2 - \mathrm{i})(2 - 2\mathrm{i})$$

$$= \frac{\alpha}{4}(1 - 3\mathrm{i}) \;\overset{!}{=}\; 3 + \mathrm{i} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \;=\; 4\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \qquad T(z) \;=\; \frac{4\mathrm{i} \cdot z + 4}{z + 2\mathrm{i}}.$$

Wir können die interpolierende Möbius-Transformation auch durch die **Dreipunktformel** finden.

Zu jeweils paarweise verschiedenen $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1,\ w_2,\ w_3 \in \mathbb{C}^*$, löse

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

nach w auf und setze $T(z) = w$.

Dann erfüllt T die Bedingungen

$$T(z_j) = w_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Wir können die interpolierende Möbius-Transformation auch durch die **Dreipunktformel** finden.

Beispiel:

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = -2, \qquad z_3 = -1 + \mathrm{i},$$
$$w_1 = 0, \qquad w_2 = 4, \qquad w_3 = 2 + 2\mathrm{i}.$$

Einsetzen in die Dreipunktformel:

$$\frac{w - 0}{w - 4} : \frac{(2+2\mathrm{i}) - 0}{(2+2\mathrm{i}) - 4} = \frac{z - 0}{z - (-2)} : \frac{(1-\mathrm{i}) - 0}{(-1+\mathrm{i}) - (-2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{w}{w - 4} : \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{z}{z+2} : \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow \quad w(z+2) = z(w-4)\frac{(\mathrm{i}+1)^2}{(\mathrm{i}-1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad wz + 2w = 4z - wz$$

$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{2z}{z+1} := T(z).$$

Möbius-Transformationen sind **kreistreu**.

<u>Es seien:</u>

- $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0,$ eine Möbius-Transformation;
- $K \subset \mathbb{C}^*$ ein verallgemeinerter Kreis.

<u>Dann gilt dir **Kreistreue**:</u>

- $-\dfrac{d}{c} \in K \qquad \Rightarrow \qquad T(K)$ ist eine Gerade.
- $-\dfrac{d}{c} \notin K \qquad \Rightarrow \qquad T(K)$ ist ein echter Kreis.

Wie finden wir die Bilder verallgemeinerter Kreise?

Falls $-\frac{d}{c} \in K$ (Bild ist eine Gerade):

- Wähle $z_1,\ z_2 \in K$, berechne $w_1 = T(z_1),\ w_2 = T(z_2)$;
- Bildgerade: $T(K) = \{w \in \mathbb{C} \mid w = w_1 + \alpha(w_2 - w_1),\ \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$.

Oft geht es einfacher: Symmetrien auszunutzen!

Wie finden wir die Bilder verallgemeinerter Kreise?

Falls $-\dfrac{d}{c} \notin K$ (Bild ist ein echter Kreis):

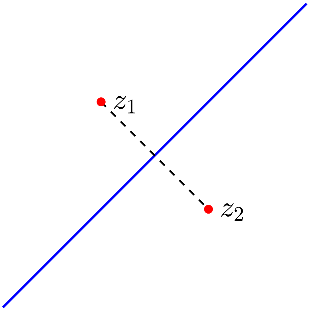
- Wähle $z_1,\ z_2,\ z_3 \in K$, berechne
  $w_1 = T(z_1),\ w_2 = T(z_2),\ w_3 = T(z_3)$;
- Löse

  $$(1)\quad |w_1 - w_0|^2 = R^2, \qquad (2)\quad |w_2 - w_0|^2 = R^2, \qquad (3)\quad |w_3 - w_0|^2 = R^2$$

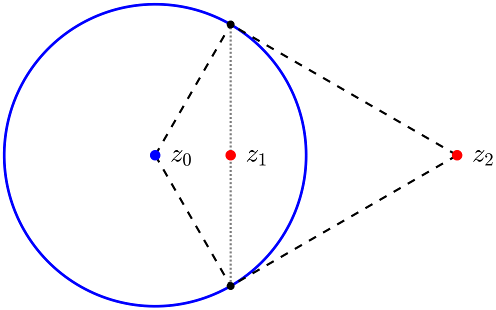
  nach $w_0 = u_0 + \mathrm{i} v_0$ und R auf.
- Bildkreis: $T(K) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| = R\}$.

Oft geht es einfacher: Symmetrien auszunutzen!

Symmetrie bzgl. verallgemeinerter Kreise



Symmetrie bzgl. einer Geraden: Spiegelung



Symmetrie bzgl. eines Kreises mit Mittelpunkt z_0 und Radius R:

$$(z_1 - z_0)(\overline{z_1} - \overline{z_0}) = R^2.$$

Wir vereinbaren: z_0 ist symmetrisch zu ∞.

Möbius-Transformationen **erhalten Symmetrien** bzgl. verallgemeinerter Kreise.

Es seien:

- $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ eine Möbius-Transformation;
- $K \subset \mathbb{C}^*$ ein verallgemeinerter Kreis;
- $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}^*$.

Dann gilt die **Symmetrieerhaltung**:

$$z_1,\ z_2 \quad \text{symmetrisch bzgl.} \quad K$$

$$\Rightarrow \qquad T(z_1),\ T(z_2) \quad \text{symmetrisch bzgl.} \quad T(K)$$

Beispiel: Möbius-Transformation $T(z) = \dfrac{4z - 4\mathrm{i}}{z - 2\mathrm{i}}$

M_1: imaginäre Achse

M_2: Kreis $|z| = 2$

M_3: reelle Achse

Beispiel: Möbius-Transformation $T(z) = \dfrac{3z - \mathrm{i}}{z + 5\mathrm{i}}$

M: Kreis $|z - 4i| = 3$