Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

SoSe 2025

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 2:

Elementare komplexe Funktionen, Natürliche Wurzeln und Potenzen

Claus R. Goetz

Universität Hamburg ● Fachbereich Mathematik

1. Elementare komplexe Funktionen

Lineare und affine Funktionen

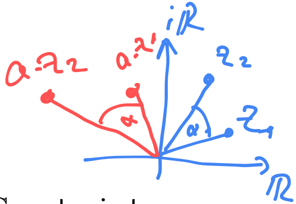
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = a \cdot z + b, \qquad \text{mit gegebenen} \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad b \in \mathbb{C}$$

Wir wissen bereits:

- Die Addition $(+b)$ bedeutet eine Verschiebung in Richtung b.
- Die Multiplikation $(a \cdot z)$ bedeutet eine Drehung um $\arg(a)$ und Streckung um den Faktor $|a|$: Mit $a = |a| \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg(a)}$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$a \cdot z = |a| r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + \arg(a))}$$

$\rightarrow$ **Alle $z \in \mathbb{C}$ werden um den selben Winkel gedreht und um den selben Faktor gestreckt!**



Insbesondere: Für festes $a \in \mathbb{C}$ ist der Winkel zwischen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und zwischen $a \cdot z_1$ und $a \cdot z_2$ gleich!

Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ können mehr!

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Dann ist $\|x_1\|_2 = \|x_2\|_2 = 1,$ aber $\|Ax_1\|_2 = 1, \quad \|Ax_2\|_2 = \sqrt{2},$ d.h. verschiedene Koordinatenrichtungen werden verschieden gestreckt.

$Ax_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Diese Abbildung nimmt eine **anisotrope** Streckung vor.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Dann liegt zwischen x_1 und x_2 ein Winkel von $\pi/2$, aber zwischen $Ax_1 = (1,0)^\top$ und $Ax_2 = (1,1)^\top$ beträgt der Winkel $\pi/4$.

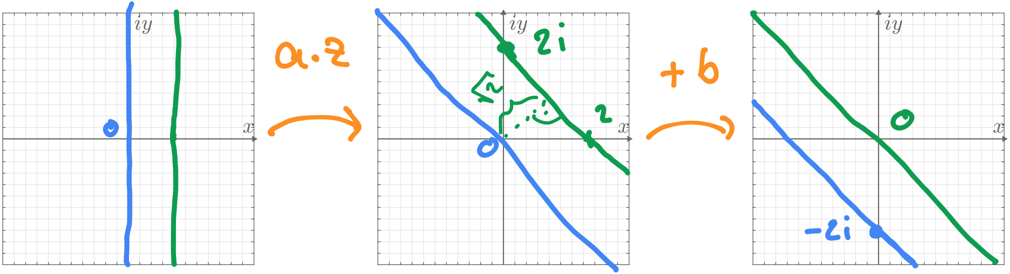
Diese Abbildung ist **nicht winkelerhaltend**.

Dass Linearität in $\mathbb{C}$ stärkere Auswirkungen als Linearität in $\mathbb{R}^2$ hat, wird noch wichtig, wenn wir über Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ reden.

Bilder unter linearen Funktionen

<u>**Beispiel:**</u> $f(z) = a \cdot z + b, \qquad a = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad b = -2\mathrm{i}$

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$$



Die Funktion $f(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}$

Für $z \neq 0,\ z = re^{i\varphi}$: $\quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}.$

$r = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{r} = 2$

$r = 1 \Rightarrow \frac{1}{r} = 1$

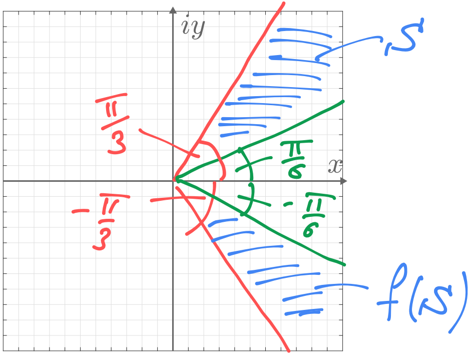
Beispiel:

$$S = \left\{ re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0, \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \right\}$$

$\{r > 0\} = (0, \infty)$

$\Rightarrow$

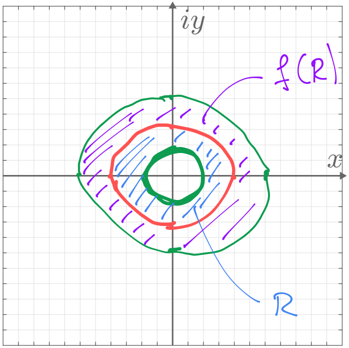
$\{\frac{1}{r}\} = (0, \infty)$



Beispiel:

$$R = \{ re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in [0.5, 1], \quad \underline{\varphi \in (-\pi, \pi]} \}$$

$\Rightarrow -\varphi \in [-\pi, \pi)$



Einschub: Darstellung von Kreisen

$K = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + Re^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi] \}$

Kreis mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, Radius $R > 0$:

$$|z - z_0| = R \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_0|^2 = R^2$$

Damit:

$$\begin{aligned} R^2 &= |z - z_0|^2 = (z - z_0)\overline{(z - z_0)} \\ &= (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) \\ &= z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} \end{aligned}$$

Wir sehen gleich, wozu wir das brauchen.

Zurück zu $f(z) = z^{-1}$.

Beispiel: Kreis mit Mittelpunkt $z_0 = 2$, Radius 2, ohne die Null:

$$D = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |z-2| = 2\}.$$

$w = u + iv$
$\overline{w} = u - iv$
$\Rightarrow \overline{w} + w$
$= 2u = 2\mathrm{Re}(w)$

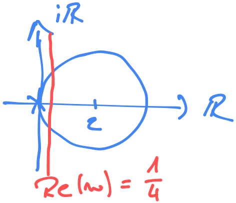
Was ist $f(D)$ mit $f(z) = z^{-1}$?

Mit der Darstellung von eben: $|z-2|^2 \;=\; z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4 \;=\; 4.$

Betrachte $w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$:

$$\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} - 2\frac{1}{w} - 2\frac{1}{\overline{w}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - 2\overline{w} - 2w = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - 2(\overline{w} + w) = 1 - 4\mathrm{Re}(w) = 0$$



Also gilt $\quad f(D) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{4} \right\} := G.$

Analog folgt $f(G) = D.$

Die Exponentialfunktion

$$e^z = e^{x+iy}$$

$$=$$

$$z = x + \mathrm{i}y: \qquad \exp(z) = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \overbrace{(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))}^{2\pi\text{ - periodisch}}.$$

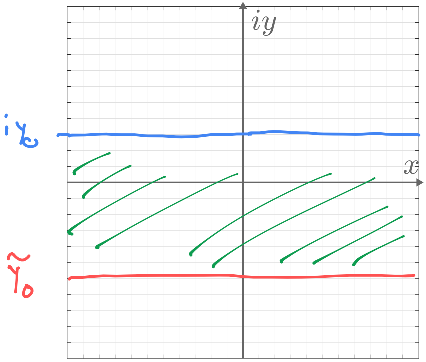
Also:

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}, \qquad \arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}(z) \quad (+2k\pi).$$

$$|e^z| = |e^x| \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1}$$

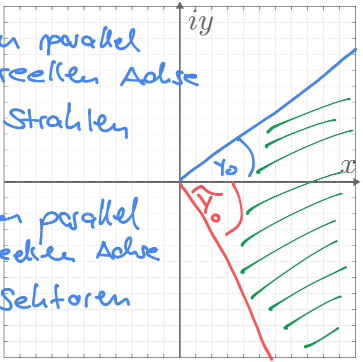
Beispiel: $z = x + iy_0$ mit $x \in \mathbb{R}$ und festem y_0.

$x \in (-\infty, \infty)$
$\Rightarrow r = e^x \in (0, \infty)$



Geraden parallel zur reellen Achse $\mapsto$ Strahlen

Streifen parallel zur reellen Achse $\mapsto$ Sektoren



$$e^z = e^x \cdot e^{iy_0}$$

Variabler Radius

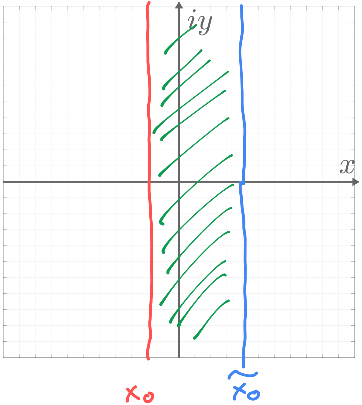
fester Winkel

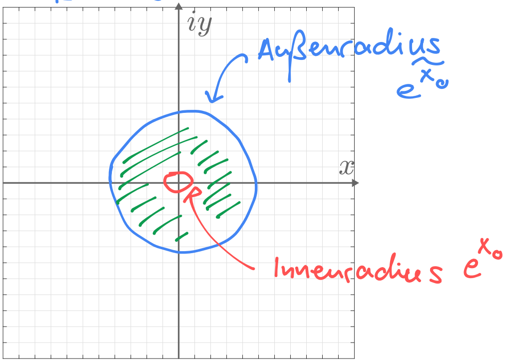
$$e^z = e^{x_0} \cdot e^{iy}$$

fester Radius

variabler Winkel

Beispiel: $z = x_0 + \mathrm{i}y$ mit $y \in \mathbb{R}$ und festem x_0.





Streifen parallel zur imaginären Achse $\mapsto$ Kreisringe um Null, die unendlich oft durchlaufen werden

Komposition von Funktionen

Beispiel: $f(z) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot z)^2 + 1 + \mathrm{i}$,

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2,\ \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$$

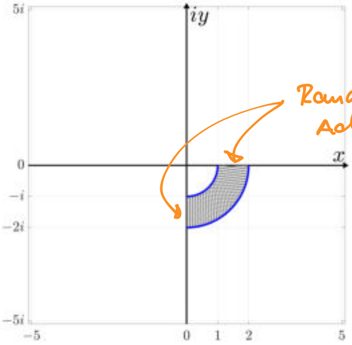
Zerlegung:

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

Mit

$$u = f_1(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot z, \qquad v = f_2(u) = v^2, \qquad w = f_3(v) = v + 1 + \mathrm{i}.$$

$$
\begin{aligned}
M &= \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2,\ \mathrm{Re}(z) \underline{>0},\ \mathrm{Im}(z) \underline{<0}\} \\
&= \{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in [1,2],\ \varphi \in (-\pi/2, 0)\}
\end{aligned}
$$



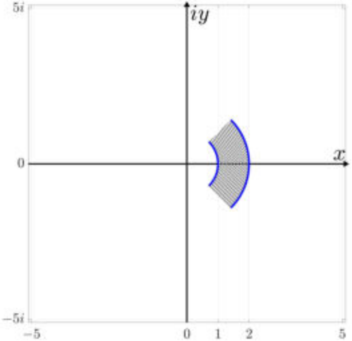
Rand auf den Achsen gehört <u>nicht</u> dazu!

Hier: $\rho = 1$

$$u = f_1(z) = \rho e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z$$

$\rho \cdot 1$ $\qquad$ $\rho \cdot 2$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $0 + \frac{\pi}{4}$

$$f_1(M) = \{u = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in [1, 2],\ \varphi \in (-\pi/4, \pi/4)\}$$



Drehung um $\frac{\pi}{4}$

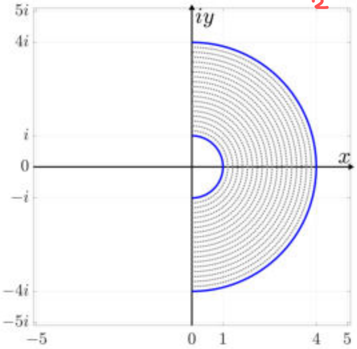
("Streckung" um den Faktor 1)

$$2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \qquad 2\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$v = f_2(u) \;=\; u^2$$

$$f_2(f_1(M)) \;=\; \{v = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in [1, 4],\; \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\}$$

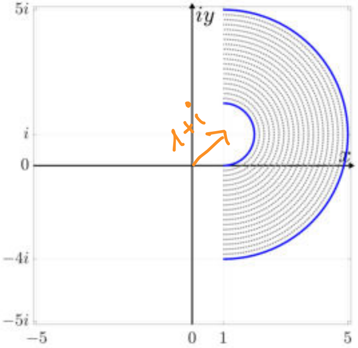
$$1^2 \qquad 2^2$$



Radien quadrieren,
Winkel verdoppeln

$$w = f_3(v) \;=\; v + 1 + \mathrm{i}$$

$$f(M) = f_3(f_2(f_1(M))) \;=\; \{w \in \mathbb{C} \mid w = re^{\mathrm{i}\varphi} \underline{+ 1 + \mathrm{i},}\; r \in [1,4],\; \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\}$$



Verschiebung

Richtung $1+i$

Wir kennen jetzt einige geometrische Operationen in der komplexen Ebene

- Verschiebung: Addition
- Drehung / Streckung: Multiplikation
- Sektoren vergrößern / verkleinern: Potenzen
- Streifen parallel zur imaginären Achse auf Ringe abbilden: $\exp$
- Streifen parallel zur reellen Achse auf Sektoren abbilden: $\exp$

2. Natürliche Potenzen / Wurzeln

Was ist die Wurzel einer komplexen Zahl?

Wir wissen schon: $z = re^{i\varphi}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n e^{in\varphi}.$

Frage: Gilt dann auch $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}$? → **Es ist etwas komplizierter.**

R Damit $\left(r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}\right)^n = re^{i\varphi}$, aber das sind noch nicht alle Lösungen.

Wir suchen $\sqrt{i}$, d.h. ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = i$.

$$w = \rho e^{i\alpha} = \sqrt{i} \quad \Rightarrow \quad w^2 = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w^2 = \rho^2 e^{i2\alpha} \overset{!}{=} 1^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$\rightarrow e^{i2\alpha} \overset{!}{=} e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$

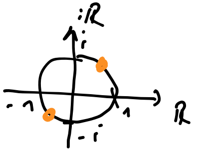
Damit:

Erst den Radius bestimmen.

$$\rho^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 1 \qquad (\text{da} \quad \rho > 0)$$

Dann den Winkel

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



Allgemeine natürliche Wurzeln und deren **Hauptwert**

Damit für $z = re^{i\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad w := z^{\frac{1}{n}},$ mit $w = \rho e^{i\alpha}$, gilt

$$w^n = \rho^n e^{in\alpha} = z = |z| e^{i\arg(z)},$$

Unendlich viele Winkel

brauchen wir $\rho = |z|^{\frac{1}{n}}$ und

$$e^{in\alpha} = e^{i\arg(z)} \quad \Rightarrow \quad n\alpha = \arg(z) + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k}{n}\pi}$$

Dann haben wir n paarweise verschiedene Punkte

nur endlich viele Punkte in $\mathbb{C}$.

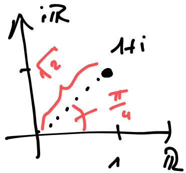
$$w = |z|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)\right), \qquad \underline{k = 0, 1, 2 \cdots, n-1},$$

mit $w^n = z$. Wir nennen $w = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg(z)}{n}}$, mit $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ den **Hauptwert** der n-ten Wurzel.

Ähnlich in $\mathbb{R}$: $\sqrt{4} = 2$, nicht -2, aber $x^2 = 4$ hat die Lösungen 2 und -2.

Beispiel: Gesucht sind alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\,z^3 = 27\mathrm{i}$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

In Polarkoordinaten:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} z^3 = 27\, e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z^3 = 27\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(1) Radius bestimmen: $|z^3| = |z|^3 \overset{!}{=} |27\, e^{i\frac{\pi}{4}}| = 27$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt[3]{27} = 3$$

→ Alle Lösungen liegen auf dem Kreis um Null mit Radius 3, $z = 3e^{i\alpha}$

(2) Winkel bestimmen: $z = 3e^{i\alpha} \Rightarrow z^3 = 27\, e^{i3\alpha}$

$$z^3 = 27\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow e^{i3\alpha} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$$

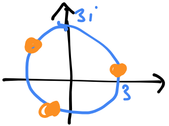
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{8k}{12}\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

← Unendlich viele Winkel

Drei Lösungen:

$$w_1 = 3e^{i\frac{\pi}{12}},\quad w_2 = 3e^{i\frac{9}{12}\pi},\quad w_3 = 3e^{i\frac{17}{12}\pi}$$

Nur drei Punkte in $\mathbb{C}$



Einige Gleichungen mit Exponentialtermen kann man auf ähnliche Art lösen.

Beispiel: Gesucht sind alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von

$$(e^z)^2 = e^{2z} = -9\mathrm{i} = 9e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

Alle Lösungen haben Realteil $\mathrm{Re}(z) = \ln(3)$, $z = \ln(3) + iy$

Fast wie eben:

(1) Realteil bestimmen: Mit $z = x + iy$:

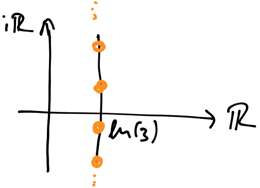
$$|(e^z)^2| = |e^z|^2 = |e^x \cdot e^{iy}|^2 = (e^x)^2 \overset{!}{=} |9e^{i(-\frac{\pi}{2})}| = 9 \Rightarrow e^x = 3$$

$$\Rightarrow \underline{x = \ln(3)}$$

(2) Imaginärteil bestimmen

$$z = \ln(3) + iy \Rightarrow (e^z)^2 = 9e^{i\cdot 2y} \overset{!}{=} 9e^{i(-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow 2y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow y = \underline{-\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$



Es gibt unendlich viele Lösungen!