

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Klausurberatung

Claus R. Goetz

Universität Hamburg • Fachbereich Mathematik

1. Klausur Mathe IV: Termin, Ort, Ablauf, Materialien und Hilfsmittel

Termin, und Ort und Ablauf

Termin: Mi., 27.08.25, 13:00 - 15:00 (KoFu und DGL II)

Ort: CU Arena (S - Neugraben)
Am Johannisland 2
21147 Hamburg

- Sie erhalten zwei Klausuren.
- Sie haben 120 Minuten, die Sie sich frei einteilen können.
- In beiden Klausuren gibt es jeweils maximal 20 Punkte.
- Am Ende werden beide Klausuren gemeinsam bewertet.

Mehr zum Ablauf

Die Halle wird in **zwei Bereiche** aufgeteilt:

- KoFu und DGL II (Deutsch)
- KoFu und DGL II (Englisch)

Wenn Sie in der Halle sind:

- Nehmen Sie in Ihrem Bereich platz, bleiben Sie sitzen.
- Wir verteilen die Klausuren. Sie füllen die Deckblätter aus. Sie dürfen die **Klausuren nicht öffnen** bis das Startsignal erfolgt. **Verfrühtes Öffnen der Klausur zählt als Täuschungsversuch!**

Während der Klausur:

- Wir kontrollieren die Anwesenheit. Legen Sie hierfür gut sichtbar Ihren Ausweis und eine Klausur mit ausgefülltem Deckblatt bereit.
- Für die Einsicht des Deckblatts der Klausur, an der sie im Moment arbeiten, müssen wir Sie leider kurz stören.

Materialien und Hilfsmittel

Sie **müssen** mitbringen:

- Schreibzeug (kein Bleistift, kein Rotstift), aber Sie brauchen *kein* eigenes Papier
- einen amtlichen Lichtbildausweis (Perso, Reisepass, Führerschein, Aufenthaltstitel)

Sie **können** mitbringen:

- Alles in Papierform (eigene Aufzeichnungen, Lehrbücher, Vorlesungsskript, ...)
- eine nicht-smarte Uhr, die keine störenden Geräusche verursacht

Sie **dürfen nicht** mitbringen:

- Smartphones, Smartwatches
- Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel

2. Klausur KoFu: Typische Themen

Vorbemerkungen

Im Folgenden besprechen wir einige Themen, die in den letzten Jahren häufig in den Klausuren vorkamen. Die soll Ihnen für die Orientierung bei der Klausurvorbereitung helfen.

Aber:

- Falls ein Thema aus der Vorlesung / den Übungen hier nicht auftaucht, folgt daraus **nicht**, dass es nicht in der Klausur vorkommen kann.
- Wir haben nicht die Zeit hier alles zu wiederholen, es folgen nur ein paar Stichpunkte.
- Insbesondere sind im Folgenden nicht immer alle nötigen Voraussetzungen angegeben.

Darstellung komplexer Zahlen

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad z = re^{i\varphi}, \quad r > 0, \quad \varphi \in [-\pi, \pi)$$

Elementare Operationen

$$\operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(z), \quad \bar{z}, \quad |z|, \quad \arg(z)$$

Einfache Teilmengen von $\mathbb{C}$

Kreise, Ringe, Sektoren, Quadranten, Streifen, Rechtecke

Wurzeln und Logarithmen

Für $k \in \mathbb{Z}$, $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$:

$$\bullet \quad w^n = z \quad \Rightarrow \quad w = |z|^{1/n} \cdot \exp \left(i \left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right)$$

$$\bullet \quad e^{nw} = z \quad \Rightarrow \quad w = \ln \left(|z|^{1/n} \right) + i \cdot \left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

Wir nennen $\ln(z) = \ln(|z|) + i \cdot \arg(z)$, mit $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$,
den **Hauptwert** des komplexen Logarithmus.

Elementare Funktionen

$az + b$, z^k , e^z , $\ln(z)$ und deren Kompositionen

Wie sehen die Bilder von Kreisen, Ringen, Sektoren, Quadranten, Streifen, Rechtecken unter elementaren Funktionen aus?

Möbius - Transformation

$$T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

Es gilt für eine Möbius-Transformation T :

- T ist eindeutig festgelegt durch drei Interpolationsbedingungen,
 $T(z_1) = y_1, \quad T(z_2) = y_2, \quad T(z_3) = y_3.$
Insbesondere für $y_1 = 0, y_2 = \infty$: $T(z) = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_2}.$
- T bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.
- G verallgemeinerter Kreis: $-d/c \in G \Leftrightarrow T(G)$ ist eine Gerade.
- T erhält Symmetrien bezgl. verallgemeinerter Kreise.
- T ist in allen $z \neq -d/c$ konform.

Cauchy-Riemann-DGLn

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist komplex differenzierbar in $z = x + iy \Leftrightarrow$

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y).$$

In diesem Fall ist $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$.

- f differenzierbar in einer Umgebung von $z_0 \Rightarrow u, v$ harmonisch
- Zu u mit $\Delta u = 0$ kann man v mit $\Delta v = 0$ finden, sodass $f = u + iv$ diff.bar ist (**konjugiert harmonische Funktion**, Potentialproblem aus CR-DGLn).
- f **konform** (winkeltreu) in $z_0 \Leftrightarrow f'(z_0) \neq 0$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $\sin'(z) = \cos(z)$, $(z^n)' = nz^{n-1}, \dots$
- G : Gebiet, f diff.bar in allen $z \in G$: f heißt **analytisch**.

Komplexe Kurvenintegrale ($\rightarrow$ P5, HA5)

$G \subset \mathbb{C}$, Γ : Kurve in G , parametrisiert durch $\Gamma = \{c(t) \mid t \in [a, b]\}$, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

Komplexes Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(c(t)) \, c'(t) \, dt.$$

- Falls G **einfach zusammenhängend** und f **analytisch** auf G mit $F' = f$:

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = F(c(b)) - F(c(a)) \quad (\rightarrow \text{wegunabhängig})$$

- Falls Γ zusätzlich **geschlossen**:

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0 \quad (\rightarrow \text{Cauchy-Integralsatz})$$

Cauchy - Integralformeln ($\rightarrow$ P5, HA5)

G : einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$

Γ : geschlossene Kurve in G , $\text{Uml}(z_0, \Gamma) = 1$

f : analytisch auf G

Cauchy-Integralformeln

- $\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$
- $\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} dz = 2\pi i \cdot \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$

G : Gebiet, f analytisch auf G

Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n, \quad z \in B_R(z_0) \quad (\text{größter Kreis um } z_0 \text{ in } G)$$

- $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$
- Meistens angenehmer: Bekannte Reihenentwicklungen verwenden.

Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, $z \in R_{r_1}^{r_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$
Konvergiert im größten Ring um z_0 , der keine Singularitäten enthält.

- In verschiedenen Ringen gibt es verschiedene Laurent-Reihen.
- $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$
- Ist f in $B_{r_2}(z_0)$ analytisch, so verschwindet der Hauptteil.
- Verwende, falls möglich, bekannte Reihendarstellung für die Funktion (oder Teile der Funktion). Oft geht der Trick mit der geometrischen Reihe.

Isolierte Singularitäten

f analytisch: isolierte Singularität bei z_0 , wenn f für ein $r > 0$ in allen z mit $0 < |z - z_0| < r$ definiert ist, aber nicht in z_0 .

Wir unterscheiden **hebbare Singularitäten**, **Polstellen** und **wesentliche Singularitäten**.

- Singularitäten können mithilfe des Hauptteils der Laurent-Reihe charakterisiert werden.
- Rationale Funktionen haben nie wesentliche Singularitäten.
- Oft geht es einfacher:
 - ▶ z_0 ist hebbbar, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.
 - ▶ z_0 ist Pol der Ordnung m , wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existiert und nicht Null ist.
 - ▶ Insbesondere für $f(z) = 1/q(z)$, q Polynom: Nullstellen von q sind Pole mit Ordnung entsprechend ihrer Vielfachheit.

Residuum

f analytisch, iso. Singularität bei z_0 , Laurent-Reihe: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

Dann heißt $\text{Res}(f, z_0) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$ das **Residuum** von f bei z_0 .

Zur Berechnung von Residuen:

- z_0 hebbar $\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = 0$
- z_0 Pol erster Ordnung $\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$
- z_0 Pol der Ordnung m $\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \frac{(z - z_0)^m f(z)}{(m-1)!}$
- $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, p, q analytisch mit $q(z_0) = 0, q'(z_0) \neq 0$
 $\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

Residuensatz ($\rightarrow$ P7, HA 7)

f : analytisch auf $G \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

Γ : geschlossene Kurve in G , die z_k jeweils mit Umlaufzahl $\text{Uml}(z_k, \Gamma)$ umläuft

Residuensatz ($\rightarrow$ P7, HA 7)

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \text{Uml}(z_k, \Gamma) \cdot \text{Res}(f, z_k)$$

$\text{Uml}(z_k, \Gamma) = \# \text{ positive Umläufe} - \# \text{ negative Umläufe}$

Uneigentliche Integrale

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \text{ Polynome mit reellen Koeffizienten und } \deg(q) \geq \deg(p) + 2,$$

$$\text{keine Nullstelle } z_k \text{ von } q \text{ ist reell} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \text{ Polynome mit } m = \deg(q) > \deg(p),$$

$$z_1, \dots, z_m \text{ einfache Nullstellen von } q \Rightarrow f(z) = \frac{\operatorname{Res}(f, z_1)}{z - z_1} + \dots + \frac{\operatorname{Res}(f, z_m)}{z - z_m}$$

3. Weitere Hinweise

Weitere Hinweise

- Der Stoff wird sich hauptsächlich an den Präsenzübungen orientieren.
- Es gibt $2 \cdot 20$ Punkte und 120 Minuten Bearbeitungszeit, d.h. im Schnitt 3 Minuten pro Punkt. Für eine Aufgabe mit drei Punkten sollten Sie nicht 20 Minuten rechnen. Eine Aufgabe mit sieben Punkten werden Sie nicht in zwei Zeilen beantworten können.

Was **nicht** drankommen wird:

- Fourier-Transformationen
- (aufwändige) Beweise

Weitere Ressourcen

Alte Klausuren:

- Sie finden die Klausuren der vorherigen Jahre auf der Lehrexporthwebsite (Link in Stud.IP)
- Beachten Sie, dass die Lehrenden in vorherigen Veranstaltung ggf. inhaltlich andere Schwerpunkte gesetzt und eine abweichende Notation verwendet haben.
- Es können andere Aufgabentypen als in vorherigen Klausuren vorkommen.

Sprechstunden / Kontakt:

- In der Woche **18.08. - 22.08.** bieten wir an der UHH Sprechstunden zur Klausurvorbereitung an (Termine folgen auf der Lehrexporthwebsite und in Stud.IP)
- Einfache Fragen können wir auch per Mail (claus.goetz@uni-hamburg.de oder DM in Stud.IP) klären.