

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 7 - Lösungen

Aufgabe 1. Berechnen Sie für $\Gamma = \partial B_\pi(0)$ die folgenden Kurvenintegrale:

$$(a) \int_{\Gamma} \frac{\sin(z)}{z^2} dz, \quad (b) \int_{\Gamma} \frac{z}{\cos(2z)} dz.$$

Lösung.

- (a) Die einzige Singularität liegt bei $z_0 = 0$. Dort liegt ein einfacher Pol, denn $zf(z) = \sin(z)/z$ ist in einer Umgebung von 0 beschränkt. Durch Taylor-Entwicklung um $z_0 = 0$ erhalten wir für $f(z) = \sin(z)/z^2$:

$$f(z) = \frac{z - z^3/3! + z^5/5! + \dots}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}z + \frac{1}{120}z^3 + \dots$$

Spätestens hier sehen wir, dass bei $z_0 = 0$ ein einfacher Pol liegt, da -1 die kleinste Potenz von z ist, die in der Laurent-Reihe auftaucht. Der zugehörige Koeffizient ist

$$c_{-1} = 1 = \text{Res}(f, 0)$$

und somit nach dem Residuensatz:

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin(z)}{z^2} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 0) = 2\pi i.$$

- (b) Sei $f(z) = z/\cos(2z)$. Die Nullstellen von $\cos(2z)$ liegen bei

$$2z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Davon liegen nur die Punkte

$$z_{1,2} = \pm \frac{3\pi}{4}, \quad z_{3,4} = \pm \frac{\pi}{4}$$

im Inneren von $B_\pi(0)$.

Mit $p(z) = z$, $q(z) = \cos(2z)$ ist $f(z) = p(z)/q(z)$. Es gilt $q(z_k) = 0$, $q'(z_k) \neq 0$, also liegen bei den z_k einfache Pole mit

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = -\frac{z_k}{2 \sin(2z_k)}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\pi/4}{2\sin(\pi/2)} = -\frac{\pi}{8}, \\ \operatorname{Res}\left(f, -\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{-\pi/4}{2\sin(-\pi/2)} = -\frac{\pi}{8}, \\ \operatorname{Res}\left(f, \frac{3\pi}{4}\right) &= -\frac{3\pi/4}{2\sin(3\pi/2)} = \frac{3\pi}{8}, \\ \operatorname{Res}\left(f, -\frac{3\pi}{4}\right) &= -\frac{-3\pi/4}{2\sin(-3\pi/2)} = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \frac{z}{\cos(2z)} dz &= 2\pi i \cdot \left(\operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Res}\left(f, -\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Res}\left(f, \frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{Res}\left(f, -\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ &= \pi^2 i.\end{aligned}$$

Aufgabe 2.

(a) Es sei $t \in \mathbb{R}$ und $z = e^{it}$. Zeigen Sie, dass dann $\cos(t) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ gilt.

(b) Es sei $B_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe und $a \in B_1(0) \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos(t) + a^2} dt = \int_{\partial B_1(0)} \frac{i/a}{(z-a)(z-1/a)} dz.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos(t) + a^2} dt = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Lösung.

(a) Wir rechnen direkt nach:

$$\frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2} (\cos(t) + i \sin(t) + \cos(-t) + i \sin(-t)) = \cos(t).$$

(b) Wir betrachten $c(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$ und

$$f(z) = \frac{i/a}{(z-a)(z-1/a)}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f(c(t))c'(t) &= \frac{i/a}{(e^{it}-a)(e^{it}-1/a)} \cdot ie^{it} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(e^{it})^2 - ae^{it} - e^{it}/a + 1} \cdot e^{it} \\ &= \frac{1}{1 + a(e^{it} + e^{-it}) + a^2} = \frac{1}{1 - 2a \cos(t) + a^2}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{i/a}{(z-a)(z-1/a)} dz = \int_0^{2\pi} f(c(t))c'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2} dt.$$

(c) Die einzige Singularität von f in $B_1(0)$ liegt bei $z_0 = a$. Wir erhalten

$$\operatorname{Res}(f, a) = \left. \frac{i/a}{z-1/a} \right|_{z=a} = \frac{i}{a^2-1}.$$

Aus dem Residuensatz folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2} dt = \int_{\partial B_1(0)} \frac{i/a}{(z-a)(z-1/a)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a) = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$