Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie für $\Gamma = \partial B_\pi(0)$ die folgenden Kurvenintegrale:

$$(a) \int_{\Gamma} \frac{\sin(z)}{z^2} dz, \quad (b) \int_{\Gamma} \frac{z}{\cos(2z)} dz.$$

Aufgabe 2.

(a) Es sei $t \in \mathbb{R}$ und $z = e^{it}$. Zeigen Sie, dass dann $\cos(t) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ gilt.

(b) Es sei $B_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe und $a \in B_1(0) \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos(t) + a^2} dt = \int_{\partial B_1(0)} \frac{i/a}{(z-a)(z-1/a)} dz.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos(t) + a^2} dt = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$