

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 6 - Lösungen

Aufgabe 1. Es sei $\ln$ der Hauptzweig des natürlichen Logarithmus und

$$f(z) = \ln(1+z) + \ln(1-z).$$

- (a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die n -te Ableitung von f gegeben ist durch

$$f^{(n)}(z) = -(n-1)! \left(\frac{(-1)^n}{(1+z)^n} + \frac{1}{(1-z)^n} \right).$$

- (b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ und geben Sie deren Konvergenzradius an.

Lösung.

- (a) Man kann natürlich direkt nachrechnen. Aber wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach n :

Induktionsanfang, $n = 1$:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-z} = -(1-1)! \left(\frac{(-1)^1}{(1+z)^1} + \frac{1}{(1-z)^1} \right).$$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(z) = -(n-1)! \left(\frac{(-1)^n}{(1+z)^n} + \frac{1}{(1-z)^n} \right).$$

Induktionsschluss: $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} f^{(n)} = \frac{d}{dz} \left(-(n-1)! \left(\frac{(-1)^n}{(1+z)^n} + \frac{1}{(1-z)^n} \right) \right) \\ &= -(n-1)! \left(\frac{-n \cdot (-1)^n}{(1+z)^{n+1}} + \frac{-n \cdot (-1)}{(1-z)^{n+1}} \right) \\ &= -n! \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(1+z)^{n+1}} + \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

und somit

$$c_0 = f(i) = \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2}) - i \cdot \frac{\pi}{4} = 2\ln(\sqrt{2}) = \ln(2).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{f^{(n)}(i)}{n!} = -\frac{1}{n} \left(\frac{e^{i \cdot n\pi}}{(\sqrt{2})^n e^{i \cdot n\pi/4}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^n e^{-i \cdot n\pi/4}} \right) \\ &= -\frac{e^{i \cdot n\pi/2}}{n \cdot (\sqrt{2})^n} (e^{i \cdot n\pi/4} + e^{-i \cdot n\pi/4}) = -\frac{2}{n} \cdot \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Die Taylor-Reihe ist somit

$$f(z) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n \cdot n!} \cdot \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cdot (z-i)^n.$$

Sie konvergiert auf dem größten Kreis um $z_0 = i$, der keine Singularität von f enthält. Die nächsten Singularitäten liegen bei $z = \pm 1$, der Konvergenzradius ist also

$$R = |\pm 1 - i| = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 2. Geben Sie *alle* Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

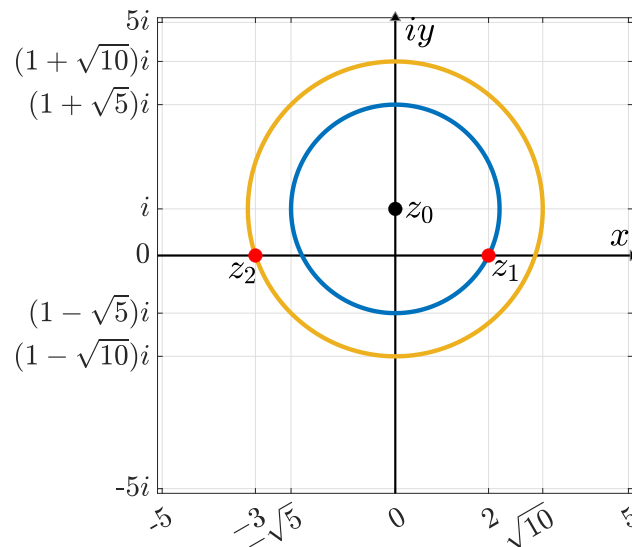
zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Lösung: Die Faktorisierung des Nenners $z^2 + z - 6 = (z-2)(z+3)$ ergibt die Singularitäten der Funktion bei $z_1 = 2$ und $z_2 = -3$.

Eine Partialbruchzerlegung liefert:

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6} = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2}.$$

Aufgrund der Lage des Entwicklungspunktes bei $z_0 = i$ und der beiden Singularitäten $z_1 = 2$ und $z_2 = -3$ kann man ablesen, dass eine Taylor-Reihenentwicklung in der Kreisscheibe $|z-i| < \sqrt{5}$ vorliegen wird, eine Laurent-Reihenentwicklung im Kreisring $\sqrt{5} < |z-i| < \sqrt{10}$ und eine davon verschiedene Laurent-Reihenentwicklung im Außenraum $\sqrt{10} < |z-i|$.



Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe im entsprechenden Konvergenzbereich können die Partialbrüche durch Reihenentwicklungen dargestellt werden:

Für $|z - i| < \sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-2} &= \frac{2}{-2+i+(z-i)} = \frac{2}{-2+i} \cdot \frac{1}{1-(z-i)/(2-i)} \\ &= \frac{2}{-2+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{(2-i)^{n+1}} (z-i)^n. \end{aligned}$$

Für $|z - i| > \sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-2} &= \frac{2}{-2+i+(z-i)} = \frac{2}{z-i} \cdot \frac{1}{1-(2-i)/(z-i)} \\ &= \frac{2}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{(2-i)^{n+1}} (z-i)^n. \end{aligned}$$

Für $|z - i| < \sqrt{10}$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{z+3} &= \frac{3}{3+i+(z-i)} = \frac{3}{3+i} \cdot \frac{1}{1+(z-i)/(3+i)} \\ &= \frac{3}{3+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3+i)^n} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(-3-i)^{n+1}} (z-i)^n. \end{aligned}$$

Für $|z - i| > \sqrt{10}$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{z+3} &= \frac{3}{3+i+(z-i)} = \frac{3}{z-i} \cdot \frac{1}{1+(3+i)/(z-i)} \\ &= \frac{3}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3+i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{3}{(-3-i)^{n+1}} (z-i)^n. \end{aligned}$$

Taylor-Reihe mit Konvergenz in der Kreisscheibe $|z - i| < \sqrt{5}$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{(2-i)^{n+1}} + \frac{-3}{(-3-i)^{n+1}} \right) (z-i)^n}_{\text{Nebenteil}}.$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Kreisring $\sqrt{5} < |z - i| < \sqrt{10}$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{(2-i)^{n+1}} (z-i)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(-3-i)^{n+1}} (z-i)^n}_{\text{Nebenteil}}.$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Außenring $\sqrt{10} < |z - i|$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{2}{(2-i)^{n+1}} + \frac{3}{(-3-i)^{n+1}} \right) (z-i)^n}_{\text{Hauptteil}}.$$

Aufgabe 3. Für eine gegebenes $R > 0$ sei $f : B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $f(0) = 0$. Dabei bezeichne $B_R(0) \subset \mathbb{C}$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt Null und Radius $R > 0$.

Wir betrachten die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{für } z \neq 0, \\ f'(0), & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Damit gilt offenbar $f(z) = z \cdot g(z)$ für alle $z \in B_R(0)$.

Zeigen Sie, dass g analytisch ist. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von g um Null gegeben ist durch

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1},$$

wobei c_n , $n \in \mathbb{N}_0$ die Koeffizienten aus der Taylorreihe von f um Null sind.

Lösung. Sei f analytisch mit $f(0) = 0$. In $B_R(0) \setminus \{0\}$ ist g als Quotient analytischer Funktionen analytisch. Die Frage ist also, was in $z_0 = 0$ passiert.

Wegen $f(0) = 0$ haben wir in der Taylor-Reihe um Null,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

dann $c_0 = 0$. Diese Reihe konvergiert für alle $z \in B_R(0)$ und wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$$

konvergiert also auch die Potenzreihe $\tilde{g}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ für alle $z \in B_R(0)$. Für alle $z \in B_R(0) \setminus \{0\}$ ist dann $\tilde{g}(z) = g(z)$.

Es gilt aber auch

$$\tilde{g}(0) = c_1 = f'(0) = g(0),$$

also ist g auf ganz $B_R(0)$ durch eine konvergente Potenzreihe gegeben und somit analytisch. Aufgrund der Eindeutigkeit der Reihendarstellung folgt, dass dies schon die Taylor-Reihe von g ist.