Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 6

Aufgabe 1. Es sei $\ln$ der Hauptzweig des natürlichen Logarithmus und

$$f(z) \;=\; \ln(1+z) \;+\; \ln(1-z).$$

(a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von f gegeben ist durch

$$f^{(n)}(z) = -(n-1)!\left(\frac{(-1)^n}{(1+z)^n} + \frac{1}{(1-z)^n}\right).$$

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = \mathrm{i}$ und geben Sie deren Konvergenzradius an.

Aufgabe 2. Geben Sie *alle* Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2+z-6}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = \mathrm{i}$ an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Aufgabe 3. Für eine gegebenes $R > 0$ sei $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $f(0) = 0$. Dabei bezeichne $B_R(0) \subset \mathbb{C}$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt Null und Radius $R > 0$.

Wir betrachten die Funktion

$$g(z) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{für } \; z \neq 0, \\ f'(0), & \text{für } \; z = 0. \end{cases}$$

Damit gilt offenbar $f(z) = z \cdot g(z)$ für alle $z \in B_R(0)$.

Zeigen Sie, dass g analytisch ist. Zeigen Sie, dass die Taylor-Reihe von g um Null gegeben ist durch

$$g(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1},$$

wobei $c_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ die Koeffizienten aus der Taylor-Reihe von f um Null sind.

Abgabe: bis 04. Juli 2025