Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 5 - Lösungen

Aufgabe 1. Berechnen Sie für die folgenden komplexen Kurvenintegrale:

$$(a) \int_{\Gamma_1} z \cdot \exp(z^2) dz, \quad \Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1 + e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\},$$

$$(b) \int_{\Gamma_2} \sin(2z) \cos^2(z) dz, \quad \Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi/2]\}.$$

Hinweis: Sie können die bekannten Additionstheoreme für reelle trigonometrische Funktionen auch für die komplexen trigonometrischen Funktionen verwenden.

Lösung. Da $f_1(z) = z \cdot \exp(z^2)$ und $f_2(z) = \sin(2z) \cos^2(z)$ analytische Funktionen sind, sind die Kurvenintegral wegunabhängig und hängen nur von den jeweiligen Endpunkten ab. Wir berechnen also zuerst die jeweiligen Stammfunktionen.

(a) Die Funktion f_1 hat die Form

$$f_1(z) = \frac{1}{2} \exp(z^2)(2z) = \frac{1}{2} \exp(w(z))w'(z), \quad \text{mit } w(z) = z^2.$$

Eine Stammfunktion ist also gegeben durch $F_1(z) = \frac{1}{2} \exp(z^2)$. Für die Randpunkte der Kurve gilt

$$(1 \pm i)^2 = \pm 2i,$$

also ist

$$\int_{\Gamma_1} f_1(z) dz = F_1(1+i) - F_1(1-i) = \frac{1}{2} (e^{2i} - e^{-2i}) = i \sin(2).$$

(b) Es gilt das Additionstheorem

$$\sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \Rightarrow \sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z).$$

Damit erhalten wir

$$f_2(z) = 2 \sin(z) \cos^3(z),$$

was wir schreiben können als

$$f_2(z) = -\frac{1}{2} (4 \cos^3(z))(-\sin(z)) = -\frac{1}{2} (4w(z)^3)w'(z), \quad \text{mit } w(z) = \cos(z).$$

Wir erhalten also die Stammfunktion

$$F_2(z) = -\frac{1}{2} \cos^4(z).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} f_2(z) \, dz &= F_2(i) - F_2(1) = -\frac{1}{2} (\cos^4(i) - \cos^4(1)) \\ &= -\frac{1}{2} (\cosh^4(1) - \cos^4(1)). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ sei

$$\partial B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

der positiv orientierte Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius R .

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

$$(a) \quad \oint_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^2 + 4} \, dz$$

$$(b) \quad \oint_{\partial B_2(0)} \frac{z^2 + 1}{z + 1} \, dz$$

$$(c) \quad \oint_{\partial B_1(-i)} \frac{\cos(z)}{(z + i)^2} \, dz$$

$$(d) \quad \oint_{\partial B_1(2)} \sin(z) + \frac{\ln(z)}{(z - 2)^2} \, dz$$

Lösung:

(a) Die Singularitäten $z_{1,2} = \pm 2i$ liegen nicht im Kreis $|z| < 1$. Cauchyscher Integralsatz:

$$\oint_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^2 + 4} \, dz = 0$$

(b) Die Singularität $z_1 = -1$ liegt im Kreis $|z| < 2$. Cauchysche Integralformel:

$$\oint_{\partial B_2(0)} \frac{z^2 + 1}{z + 1} \, dz = 2\pi i ((-1)^2 + 1) = 4\pi i$$

(c) Die Singularität $z_1 = -i$ liegt im Kreis $|z + i| < 1$. Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint_{\partial B_1(-i)} \frac{\cos(z)}{(z + i)^2} \, dz = -\frac{2\pi i}{1!} \sin(-i) = 2\pi i \cdot \sin(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \pi (e^{-1} - e)$$

- (d) Die Singularität des zweiten Summanden unter dem Integral, $z_1 = 2$, liegt im Kreis $|z - 2| < 1$. Cauchyscher Integralsatz und verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint_{\partial B_1(2)} \sin(z) + \frac{\ln(z)}{(z-2)^2} dz = \oint_{\partial B_1(2)} \frac{\ln(z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \ln'(z)|_{z=2} = \pi i$$

Aufgabe 3. (Falls Sie an Theorie interessiert sind und eine Herausforderung suchen)

Es sei

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

die offene Einheitskreisscheibe und $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die stetig auf dem Abschluss $\bar{D}$ ist, sodass die Funktion $f(z) := z \cdot g(z)$ die Bedingung $|f(z)| < 1$ für alle $z \in D$ erfüllt.

Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$.
- (b) Falls es ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ gibt, so existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $f(z) = cz$ für alle $z \in D$. In diesem Fall ist f also eine Drehung.

Hinweis: Verwenden Sie das Maximumsprinzip auf Kreisscheiben um Null mit Radien $0 < r < 1$.

Lösung. Wir stellen zunächst fest, dass f als Produkt analytischer Funktionen wieder analytisch ist und $f(0) = 0$ erfüllt.

Tatsächlich kann man zeigen, dass jede analytische Funktion f mit $f(0) = 0$ sich in der Form $f(z) = zg(z)$ mit einem analytischen g schreiben lässt. Das brauchen wir hier aber nicht.

- (a) Für jede Kreisscheibe um Null mit Radius $0 < r < 1$ gilt: Das Maximum von $|f|$ liegt auf dem Rand, d.h. auf dem Kreis $|z| = r$. Für diese z gilt aber

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}, \quad \text{da } |f(z)| \leq 1.$$

Somit ist $|g|$ auch im Inneren der Kreisscheibe beschränkt durch $1/r$. Da dies für alle $r < 1$ gilt, folgt im Grenzübergang $r \rightarrow 1$, dass $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$ und somit $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$.

- (b) Es gebe ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$. Nach Teil (a) muss dann also $|g(z_0)| = 1$ gelten. Damit nimmt $|g|$ sein Maximum im Inneren an, also muss g konstant sein, d.h. $g(z) = c$ für ein $c \in \mathbb{C}$ und alle $z \in D$. Aus $|g(z_0)| = 1$ folgt $|c| = 1$.