

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie für die folgenden komplexen Kurvenintegrale:

(a) $\int_{\Gamma_1} z \cdot \exp(z^2) \, dz, \quad \Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1 + e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\},$

(b) $\int_{\Gamma_2} \sin(2z) \cos^2(z) \, dz, \quad \Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi/2]\}.$

Hinweis: Sie können die bekannten Additionstheoreme für reelle trigonometrische Funktionen auch für die komplexen trigonometrischen Funktionen verwenden.

Aufgabe 2. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ sei

$$\partial B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

der positiv orientierte Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius R .

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

(a) $\oint_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^2 + 4} \, dz$

(b) $\oint_{\partial B_2(0)} \frac{z^2 + 1}{z + 1} \, dz$

(c) $\oint_{\partial B_1(-i)} \frac{\cos(z)}{(z + i)^2} \, dz$

(d) $\oint_{\partial B_1(2)} \sin(z) + \frac{\ln(z)}{(z - 2)^2} \, dz$

Aufgabe 3. (Falls Sie an Theorie interessiert sind und eine Herausforderung suchen)

Es sei

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

die offene Einheitskreisscheibe und $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die stetig auf dem Abschluss $\overline{D}$ ist, sodass die Funktion $f(z) := z \cdot g(z)$ die Bedingung $|f(z)| < 1$ für alle $z \in D$ erfüllt.

Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$.
- (b) Falls es ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ gibt, so existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $f(z) = cz$ für alle $z \in D$. In diesem Fall ist f also eine Drehung.

Hinweis: Verwenden Sie das Maximumsprinzip auf Kreisscheiben um Null mit Radien $0 < r < 1$.