Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 4 - Lösungen

Aufgabe 1.

(a) Es sei

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \qquad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

eine Möbius-Transformation. Zeigen Sie, dass T in allen $z \neq -\frac{d}{c}$ eine konforme Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die gestreckte Joukowski-Funktion,

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \qquad z \neq 0,$$

in allen $z \neq 0$ komplex differenzierbar ist. In welchen $z \in \mathbb{C}$ ist f konform?

Lösung.

(a) Die Funktionen $f(z) = az + b$ und $g(z) = cz + d$ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Für $z \neq -d/c$ ist $g(z) \neq 0$ und daher $T = f/g$ differenzierbar mit

$$T'(z) \;=\; \frac{a \cdot (cz+d) - (az+b) \cdot c}{(cz+d)^2} \;=\; \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \;\neq\; 0,$$

da T eine Möbius-Transformation ist. Somit ist T in allen $z \neq -d/c$ konform.

(b) Als Summe differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar mit

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}, \qquad z \neq 0.$$

Dabei ist

$$f'(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 1,$$

d.h. f ist konform in allen $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Aufgabe 2.

(a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = (x^3 + \alpha xy^2) + \mathrm{i} \cdot (\beta x^2 y - y^3)$$

in allen $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

(b) In welchen Punkten $z \neq 0$ ist die Funktion

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{z^2}{\overline{z}}$$

komplex differenzierbar?

Hinweis: Verwenden Sie für g die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in Polarkoordinaten.

Lösung.

(a) Mit $u(x,y) = x^3 + \alpha xy^2$, $v(x,y) = \beta x^2 y - y^3$ lauten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen:

$$u_x(x,y) \;=\; 3x^2 + \alpha y^2 \;\overset{!}{=}\; v_y(x,y) \;=\; \beta x^2 - 3y^2 \qquad \Rightarrow \qquad -\alpha \;=\; \beta \;=\; 3,$$

sowie

$$u_y(x,y) \;=\; 2\alpha xy \;\overset{!}{=}\; -\,v_x(x,y) \;=\; -\,2\beta xy \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \;=\; -\,\beta.$$

Also ist f für $\alpha = -3$ und $\beta = 3$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

(b) In Polarkoordinaten, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $r > 0$, hat $g(z)$ die Darstellung

$$g(z) \;=\; \frac{r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}}{re^{-\mathrm{i}\varphi}} \;=\; r\mathrm{e}^{i3\varphi} \;=\; r\cos(3\varphi) \;+\; \mathrm{i} \cdot r\sin(3\varphi).$$

Mit $u(r,\varphi) = r\cos(3\varphi)$, $v(r,\varphi) = r\sin(3\varphi)$ lauten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in Polarkoordinaten:

$$u_r(r,\varphi) \;=\; \cos(3\varphi) \;\overset{!}{=}\; \frac{1}{r} v_\varphi(r,\varphi) \;=\; 3\cos(3\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad \cos(3\varphi) = 0,$$

sowie

$$u_\varphi(r,\varphi) \;=\; -\,3r\sin(3\varphi) \;\overset{!}{=}\; -\,rv_r(r,\varphi) \;=\; -\,r\sin(3\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad -\sin(3\varphi) = 0.$$

Es gibt aber keinen Winkel φ mit $\sin(3\varphi) = 0 = \cos(3\varphi)$, also ist g nirgends differenzierbar.

Aufgabe 3.

(a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, mit

$$T(0) \;=\; 2\mathrm{i}, \qquad T(4) \;=\; 0, \qquad T(8) \;=\; \infty.$$

(b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden Geraden unter T:

(i) $G_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$,

(ii) $G_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Im}(z) = 8 - \operatorname{Re}(z)\}$,

(iii) $G_3 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\}$.

(c) Auf welche Menge wird das Innere des Dreiecks mit den Ecken $0,\ 8,\ 4{+}4\mathrm{i}$ abgebildet? Skizzieren Sie das Urbild und das Bild.

Lösung.

(a) Wir kennen die Nullstelle und Polstelle von T, somit können wir den Ansatz

$$T(z) = \alpha \cdot \frac{z-4}{z-8}$$

verwenden. Damit folgt

$$T(0) \;=\; \alpha \cdot \frac{0-4}{0-8} \;=\; \frac{\alpha}{2} \;\stackrel{!}{=}\; 2\mathrm{i} \quad\Rightarrow\quad \alpha \;=\; 4\mathrm{i}. \quad\Rightarrow\quad T(z) \;=\; \frac{4\mathrm{i}\cdot z - 16\mathrm{i}}{z-8}.$$

(b) Verallgemeinerte Kreise durch $-d/c \;=\; 8$ werden auf Geraden abgebildet.

(i) Es gilt $8 \in G_1 = \mathbb{R}$, also ist $T(\mathbb{R})$ eine Gerade. Es gilt

$$T(0) = 2\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}, \quad T(4) = 0 \in \mathrm{i}\mathbb{R} \qquad\Rightarrow\qquad T(\mathbb{R}) = \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

(ii) Es gilt $8 \in G_2$, also ist auch $T(G_2)$ eine Gerade, die wir wieder durch zwei Punkte bestimmen können. Z.B. ist $8\mathrm{i} \in G_2$ und

$$T(8\mathrm{i}) \;=\; \frac{4\mathrm{i}\cdot 8\mathrm{i} - 16\mathrm{i}}{8\mathrm{i}-8} \;=\; \frac{32+16\mathrm{i}}{8-8\mathrm{i}} \;=\; \frac{4+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \;=\; 1+3\mathrm{i} \;=:\; w_1,$$

sowie $4+4\mathrm{i} \in G_2$ mit

$$T(4+4\mathrm{i}) \;=\; \frac{4\mathrm{i}\cdot(4+4\mathrm{i}) - 16\mathrm{i}}{4\mathrm{i}+4-8} \;=\; \frac{-16}{4\mathrm{i}-4} \;=\; \frac{4}{1-\mathrm{i}} \;=\; 2+2\mathrm{i} \;=:\; w_2.$$

Die Bildgerade hat damit die Form

$$\begin{aligned} T(G_2) \;&=\; \{w = w_1 + \lambda(w_2 - w_1) \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &=\; \{w = (1+3\mathrm{i}) + \lambda(1-\mathrm{i}) \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &=\; \{w = (1+\lambda) + \mathrm{i}(3-\lambda) \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &=\; \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) = 4 - \operatorname{Re}(w)\}. \end{aligned}$$

(iii) Da $8 \notin G_3$, ist $T(G_3)$ ein (echter) Kreis. Da $T(8) = \infty$ bezüglich des Bildkreises symmetrisch zum Mittelpunkt ist, ist der Mittelpunkt gegeben durch $T(z_*)$, wobei z_* symmetrisch zu 8 bezüglich G_3 ist. Hier ist $z_* = 8\mathrm{i}$, also liegt der Mittelpunkt bei $T(8\mathrm{i}) = 1 + 3\mathrm{i}$. Wir wissen, dass z.B. $T(0) = 2\mathrm{i}$ im Bildkreis liegt und erhalten für den Radius:

$$R = \sqrt{(1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}.$$

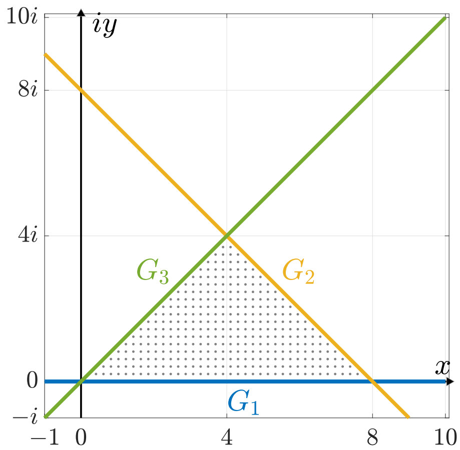
Alternativ kann man Radius und Mittelpunkt natürlich auch bestimmen, indem man drei Punkte auf dem Kreis bestimmt.

(c) Das Dreieck wird durch die Geraden G_1, G_2, G_3 begrenzt, das Bild also durch die Bilder dieser Geraden. Wenn wir einen Punkt aus dem Inneren des Dreiecks abbilden, z.B. $4 + 2\mathrm{i}$, so erhalten wir

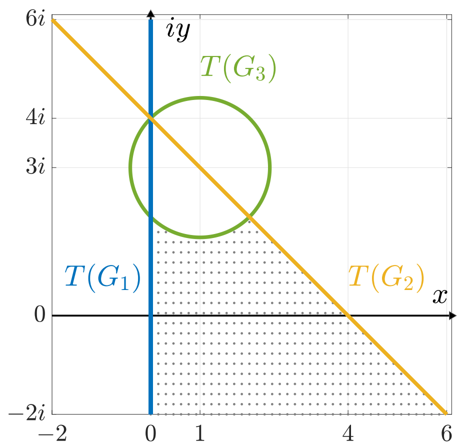
$$T(4 + 2\mathrm{i}) \;=\; \frac{8}{5} + \mathrm{i} \cdot \frac{4}{5} \;:=\; w_*.$$

Dann gilt

- $\mathrm{Re}(w_*) > 0$, also liegt das Bild rechts von $T(G_1) = \mathrm{i}\mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(w_*) < 4 - \mathrm{Re}(w_*)$, also liegt das Bild unterhalb von $T(G_2)$;
- $|w_* - (1 + 3\mathrm{i})| \;=\; \sqrt{\left(\frac{8}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{4} - 1\right)} \;=\; \frac{\sqrt{130}}{5} \;>\; 2,$ also liegt das Bild außerhalb von $T(G_3)$.



Das Dreieck wird durch die Geraden G_1, G_2, G_3 begrenzt.



Das Bild wird durch $T(G_1), T(G_2)$, $T(G_3)$ begrenzt.

Wir erhalten die Bildmenge:

$$\{w = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C} \;\mid\; u > 0, \quad v < 4 - u, \quad |w - (1 + 3\mathrm{i})| > 2\}.$$