

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 4

Aufgabe 1.

- (a) Es sei

$$T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

eine Möbius-Transformation. Zeigen Sie, dass T in allen $z \neq -\frac{d}{c}$ eine konforme Abbildung ist.

- (b) Zeigen Sie, dass die gestreckte Joukowski-Funktion,

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \quad z \neq 0,$$

in allen $z \neq 0$ komplex differenzierbar ist. In welchen $z \in \mathbb{C}$ ist f konform?

Aufgabe 2.

- (a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = (x^3 + \alpha xy^2) + i \cdot (\beta x^2 y - y^3)$$

in allen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

- (b) In welchen Punkten $z \neq 0$ ist die Funktion

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}$$

komplex differenzierbar?

Hinweis: Verwenden Sie für g die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen in Polarkoordinaten.

Aufgabe 3.

- (a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, mit

$$T(0) = 2i, \quad T(4) = 0, \quad T(8) = \infty.$$

- (b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden Geraden unter T :

- (i) $G_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$,
- (ii) $G_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Im}(z) = 8 - \operatorname{Re}(z)\}$,
- (iii) $G_3 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\}$.

- (c) Auf welche Menge wird das Innere des Dreiecks mit den Ecken $0, 8, 4+4i$ abgebildet? Skizzieren Sie das Urbild und das Bild.