

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 3 - Lösungen

Aufgabe 1. Wir betrachten die komplexe Kosinus-Funktion, definiert durch

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

(a) Zeigen Sie, dass mit $z = x + iy$ gilt:

$$\operatorname{Re}(\cos(z)) = \cos(x) \cosh(y), \quad \operatorname{Im}(\cos(z)) = -\sin(x) \sinh(y).$$

Zur Erinnerung: $\cosh(y) = (e^y + e^{-y})/2$, $\sinh(y) = (e^y - e^{-y})/2$.

(b) Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $\cos(z) = \frac{5}{4}$.

$$\text{Hinweis: } \cosh(\ln(2)) = \frac{5}{4}.$$

Lösung.

(a) Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos(x) + i \sin(x)) + e^y(\cos(x) - i \sin(x))) \\ &= \cos(x) \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) - i \sin(x) \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ &= \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y). \end{aligned}$$

(b) Aus $\cos(z) = \frac{5}{4}$ folgt $\operatorname{Im}(\cos(z)) = -\sin(x) \sinh(y) = 0$.

1.Fall: $\sinh(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{5}{4} = \cos(x) \cosh(0) = \cos(x)$.
In diesem Fall gibt es keine Lösung.

2.Fall: $\sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow \frac{5}{4} = \cos(k\pi) \cosh(y)$.

Da $\cosh(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, muss $\cos(k\pi) > 0$ gelten, also $k = 2\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$.
Damit folgt

$$\frac{5}{4} = \cosh(y) \Rightarrow y = \pm \operatorname{arcosh}\left(\frac{5}{4}\right) = \pm \ln(2).$$

Schließlich haben wir

$$z = 2\ell\pi \pm i\ln(2), \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 2. Gegeben seien die Funktion $w = f(z) := \frac{z}{2} + \frac{2}{z}$, sowie die Mengen

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq -2, \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

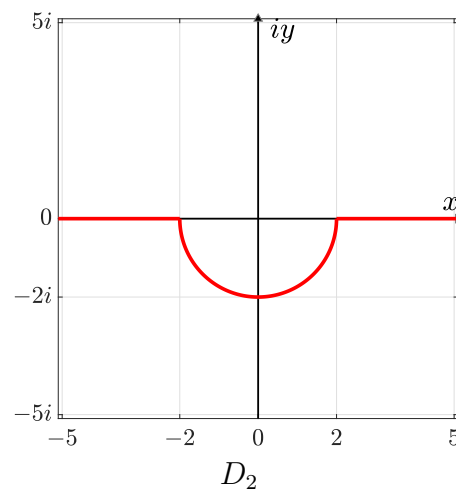
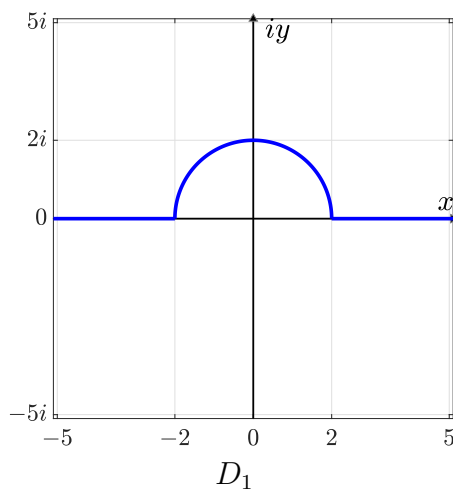
$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 2, \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

$$O = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 2e^{i\varphi}, \varphi \in (0, \pi)\}$$

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 2e^{i\varphi}, \varphi \in (\pi, 2\pi)\}$$

Wir setzen

$$D_1 = L \cup O \cup R, \quad D_2 = L \cup U \cup R.$$



- Bestimmen Sie die Bilder von D_1 und D_2 unter f .
- Auf welchen der Mengen D_1 , D_2 , $D_1 \cup D_2$ ist f umkehrbar?
- Berechnen Sie die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 2$.

Lösung:

- Auf L und R können wir f jeweils als reelle Funktion auffassen. In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f dann (reell) differenzierbar mit

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Also ist f in L und R streng monoton. Wegen

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \infty & f(2) &= 2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty & f(-2) &= -2\end{aligned}$$

folgt

$$f(L) = (-\infty, -2], \quad f(R) = [2, \infty).$$

Weiterhin ist

$$f(2e^{i\varphi}) = e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} = 2\cos(\varphi).$$

Damit ist

$$f(O) = f(U) = (-2, 2),$$

wobei das Intervall für $\varphi \in (0, \pi)$ „vorwärts“ und für $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ „rückwärts“ durchlaufen wird. Zusammen ist also $f(D_1) = f(D_2) = \mathbb{R}$.

(b) Auf D_1 und D_2 ist f jeweils umkehrbar, auf $D_1 \cup D_2$ jedoch nicht, da jedes Element in $(-2, 2)$ zwei Urbilder in $D_1 \cup D_2$ hat.

(c) Für $|z| > 2$ rechnen wir direkt nach:

$$w = \frac{2}{z} + \frac{z}{2} \quad \Rightarrow \quad z^2 - 2wz + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = w \pm \sqrt{w^2 - 4},$$

wobei wir jeweils den Ast der Wurzel wählen, der $|z| > 2$ liefert.