Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 2 - Lösungen

Aufgabe 1. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine (kurze) Begründung an.

(a) Behauptung: *Geraden* der Form

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \alpha z_0,\ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{mit einem festen } z_0 \in \mathbb{C}$$

werden durch $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, auf *Halbgeraden* der Form

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \beta w_0,\ \beta \geq 0\ \} \qquad \text{mit einem geeigneten } w_0 \in \mathbb{C}$$

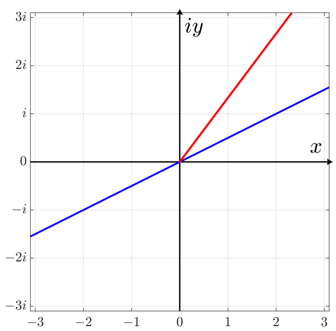
abgebildet.

(b) Behauptung: *Kreise* in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $R > 0$ werden durch $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, auf Kreise mit Mittelpunkt z_0^2 und Radius R^2 abgebildet.

Lösung.

(a) Die Behauptung ist *wahr*.

Da alle $z \in G$ die Form $z = \alpha z_0$ haben, sind alle $w \in f(G)$ von der Form $w = z^2 = \alpha^2 z_0^2$, d.h. mit $\beta = \alpha^2$ und $w_0 = z_0^2$ folgt die Behauptung.



Blau: Gerade G mit $z_0 = 2 + \mathrm{i}$,
Rot: $H = f(G)$

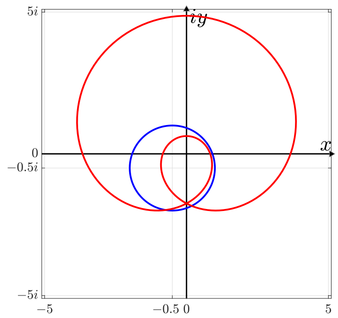
(b) Die Behauptung ist im Allgemeinen *falsch*. Für den Spezialfall $z_0 = 0$ ist sie wahr. Wir können einen Kreis mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $R > 0$ schreiben als

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Somit ist

$$f(K) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0^2 + R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi} + 2z_0R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Für $z_0 = 0$ liefert dies einen Kreis um Null mit Radius R^2 (in dem jedes Element zwei Urbilder in K hat), aber für $z_0 \neq 0$ bedeutet der Term $2z_0R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, dass $f(K)$ i.A. kein Kreis ist.



Blau: Kreis K mit Mittelpunkt $z_0 = -0.5 - 0.5\mathrm{i}$, Rot: $f(K)$

Aufgabe 2.

(a) Kann man die Menge

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1\}$$

durch eine *lineare* Abbildung in die Menge

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \max\{|\mathrm{Re}(z)|,\ |\mathrm{Im}(z)|\} = 1\}$$

transformieren? D.h. gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $Q = f(S)$.

(b) Kann das Rechteck mit den Eckpunkten

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_3 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_4 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

durch eine *lineare* Abbildung in das Rechteck mit den Eckpunkten

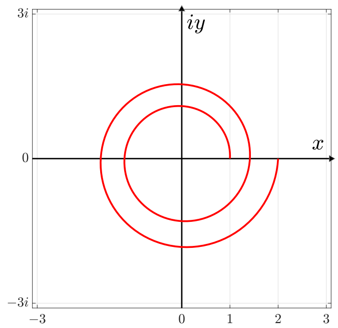
$$w_1 = 1 + \mathrm{i}, \quad w_2 = 1 - \mathrm{i}, \quad w_3 = -1 - \mathrm{i}, \quad w_4 = -1 + \mathrm{i}$$

transformiert werden?

(c) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \exp(z)$. Wir suchen eine Menge der Form

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \alpha z_0,\ \alpha \in [a, b]\}$$

für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sodass das Bild $\exp(M)$ eine im mathematischen Sinn positiv zweifach um Null gewundene Spirale mit Startpunkt 1 und Endpunkt 2 ist (vgl. Abbildung rechts). Finden Sie hierfür ein geeignetes $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein geeignetes $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

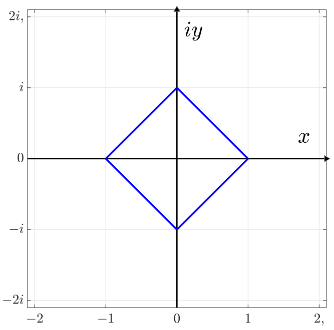


M

Lösung.

(a) Die Menge S ist ein Quadrat mit den Eckpunkten $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ (Seitenlänge $\sqrt{2}$). Q ist ein Quadrat mit den Eckpunkten $1+\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i},\ -1-\mathrm{i},\ -1+\mathrm{i}$ (Seitenlänge 2). Die Transformation kann also durch Drehung und Streckung erfolgen.

Genauer: Um von S nach Q zu kommen, müssen wir um $\pi/4$ drehen und um den Faktor $\sqrt{2}$ strecken. Das leistet die lineare Abbildung $f(z) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot z$.

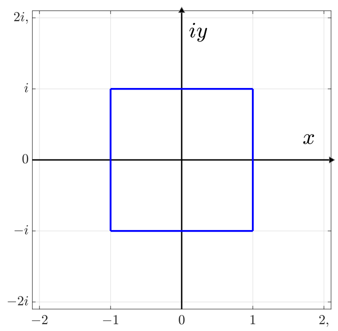


S

$$f(z) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot z$$

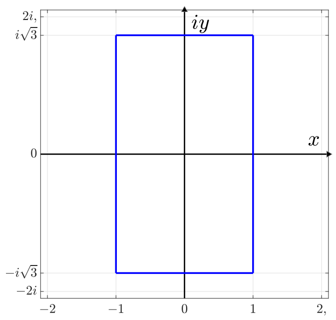
$$\longrightarrow$$

Rotation und Streckung



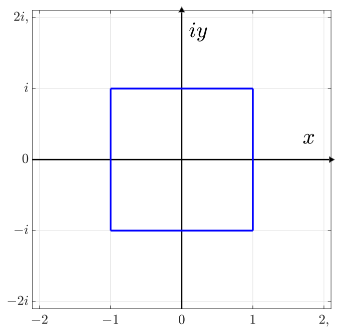
$Q = f(S)$

(b) Das Rechteck mit den Eckpunkten $z_1, \ldots, z_4$ hat zwei Kanten der Länge 2 und zwei Kanten der Länge $2\sqrt{3}$. Die Eckpunkte $w_1, \ldots, w_4$ ergeben ein Quadrat. Bei einer linearen Transformation müssten aber alle Kanten um den gleichen Faktor gestreckt werden, wir können hierdurch das erste Rechteck nicht in ein Quadrat transformieren.



Rechteck mit Seitenlängen 2 *und* $2\sqrt{3}$

Anisotrope Streckung ist mit einer linearen Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *nicht möglich.*



Quadrat mit Seitenlänge 2

(c) Schreiben wir $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, so ist

$$\exp(\alpha z_0) = \exp(\alpha x_0) \cdot \exp(\mathrm{i}\alpha y_0).$$

Wir erreichen eine zweifache Windung mit Anfangs- und Endpunkt auf der positiven reellen Halbachse, wenn αy_0 von 0 bis 4π läuft, also z.B. für $\alpha \in [0, 4\pi]$ und $y_0 = 1$. Dies liefert auch schon, dass der Anfangspunkt bei $\exp(0 \cdot x_0) = 1$ liegt. Um den Endpunkt auf 2 zu legen, benötigen wir

$$\exp(4\pi \cdot x_0) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\ln(2)}{4\pi}.$$

Wir können also

$$z_0 = \frac{\ln(2)}{4\pi} + \mathrm{i}, \qquad [a,b] = [0, 4\pi]$$

wählen.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Gleichung

$$(z-4)^{20} = z^{20}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung 19 Lösungen besitzt. Zeigen Sie weiterhin, dass alle diese Lösungen Realteil $\mathrm{Re}(z) = 2$ haben.

Lösung. Wir können schreiben

$$(z-4)^{20} \;=\; z^{20} + q(z),$$

wobei q ein Polynom vom Grad 19 ist. Die Gleichung $(z-4)^{20} = z^{20}$ ist dann äquivalent zu $q(z) = 0$. Da q ein Polynom vom Grad 19 ist, hat es 19 Nullstellen.

Weiterhin gilt

$$(z-4)^{20} \;=\; z^{20} \qquad \Rightarrow \qquad |(z-4)^{20}| \;=\; |z^{20}| \qquad \Rightarrow \qquad |(z-4)|^{20} \;=\; |z|^{20},$$

d.h. jeden Lösung hat den gleichen Abstand zu 0 und zu 4. Also haben alle Lösungen Realteil $\mathrm{Re}(z) = 2$.