

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 2

Aufgabe 1. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine (kurze) Begründung an.

- (a) Behauptung: *Geraden* in der komplexen Ebene der Form

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \alpha z_0, \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit einem festen } z_0 \in \mathbb{C}$$

werden durch $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$, auf *Halbgeraden* der Form

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \beta w_0, \beta \geq 0\} \quad \text{mit einem geeigneten } w_0 \in \mathbb{C}$$

abgebildet.

- (b) Behauptung: *Kreise* in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $R > 0$ werden durch $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$, auf Kreise mit Mittelpunkt z_0^2 und Radius R^2 abgebildet.

Aufgabe 2.

- (a) Kann man die Menge

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = 1\}$$

durch eine *lineare* Abbildung in die Menge

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} = 1\}$$

transformieren? D.h. gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $Q = f(S)$.

- (b) Kann das Rechteck mit den Eckpunkten

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_4 = -1 + i\sqrt{3}$$

durch eine *lineare* Abbildung in das Rechteck mit den Eckpunkten

$$w_1 = 1 + i, \quad w_2 = 1 - i, \quad w_3 = -1 - i, \quad w_4 = -1 + i$$

transformiert werden?

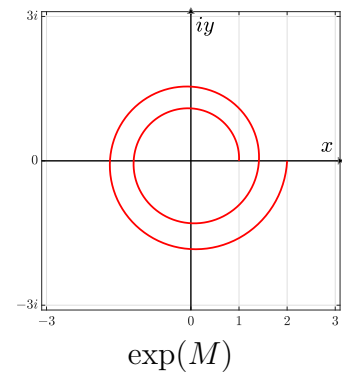
(c) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)$.

Wir suchen eine Menge der Form

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \alpha z_0, \alpha \in [a, b]\}$$

für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sodass das Bild $\exp(M)$ eine im mathematischen Sinn positiv zweifach um Null gewundene Spirale mit Startpunkt 1 und Endpunkt 2 ist (vgl. Abbildung rechts).

Finden Sie hierfür ein geeignetes $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein geeignetes $[a, b] \subset \mathbb{R}$.



Aufgabe 3. Wir betrachten die Gleichung

$$(z - 4)^{20} = z^{20}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung 19 Lösungen besitzt. Zeigen Sie weiterhin, dass alle diese Lösungen Realteil $\operatorname{Re}(z) = 2$ haben.