Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 1 - Lösungen

Aus der *Eulerschen Formel* ergeben sich für Kosinus und Sinus jeweils die Darstellungen

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right), \qquad \sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Benutzen Sie diese um die folgenden Aussagen zu beweisen.

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).$$

Lösung. Mithilfe der Eulerschen Formel können wir schreiben

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2} + \frac{3}{4}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

(a) Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien reelle Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gegeben. Wir betrachten die Funktion $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} \left[a_\ell \cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x)\right] \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Zeigen Sie: Die Funktion f_n besitzt die Darstellung

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

mit *komplexen* Koeffizienten $c_{-n}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie diese Koeffizienten.

(b) Seien nun komplexe Zahlen $c_{-n}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Wir betrachten die Funktion $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$g_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Wir nehmen an, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $c_0 \in \mathbb{R}$;

(ii) $c_\ell = \overline{c_{-\ell}}$, für $\ell = 1, \ldots, n$. D.h. c_ℓ ist die konjugiert komplexe Zahl zu $c_{-\ell}$.

Zeigen Sie: Dann ist g_n reell und besitzt eine Darstellung der Form $(*)$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$.

Lösung.

(a) Aus der Eulerschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} \left[\frac{a_\ell}{2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} + e^{-\mathrm{i}\ell x} \right) + \frac{b_\ell}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} - e^{-\mathrm{i}\ell x} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} \left[\frac{a_\ell - \mathrm{i}b_\ell}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} + \frac{a_\ell + \mathrm{i}b_\ell}{2} e^{-\mathrm{i}\ell x} \right] \\ &= c_0 + \sum_{\ell=1}^{n} \left[c_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} + c_{-\ell} e^{-\mathrm{i}\ell x} \right], \end{aligned}$$

mit

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_\ell = \frac{a_\ell - \mathrm{i}b_\ell}{2}, \qquad c_{-\ell} = \frac{a_\ell + \mathrm{i}b_\ell}{2}, \qquad \ell = 1, \ldots, n.$$

Somit gilt

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir schreiben zunächst

$$g_n(x) = c_0 + \sum_{\ell=1}^{n} \left[\left(\mathrm{Re}(c_\ell) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(c_\ell) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} \; + \; \left(\mathrm{Re}(c_{-\ell}) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(c_{-\ell}) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell x} \right].$$

Wegen $c_\ell = \overline{c_{-\ell}}$ gilt nun

$$\mathrm{Re}(c_{-\ell}) = \mathrm{Re}(c_\ell) = \frac{1}{2}(c_\ell + c_{-\ell}), \qquad -\mathrm{Im}(c_{-\ell}) = \mathrm{Im}(c_\ell) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(c_\ell - c_{-\ell}).$$

Damit können wir g_n darstellen als

$$g_n(x) = c_0 + \sum_{\ell=1}^{n} \left[(c_\ell + c_{-\ell}) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell x}}{2} \; + \; \mathrm{i}\,(c_\ell - c_{-\ell}) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell x}}{2\mathrm{i}} \right].$$

Mit

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_\ell = (c_\ell + c_{-\ell}), \qquad b_\ell = \mathrm{i}\,(c_\ell - c_{-\ell}), \quad \ell = 1, \ldots, n,$$

hat g_n also eine Darstellung der Form $(*)$. Beachte, dass die a_j, b_j tatsächlich reelle Zahlen sind!