

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 1

Aus der *Eulerschen Formel* ergeben sich für Kosinus und Sinus jeweils die Darstellungen

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Benutzen Sie diese um die folgenden Aussagen zu beweisen.

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x).$$

Aufgabe 2:

- (a) Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien reelle Zahlen $a_0, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$ gegeben. Wir betrachten die Funktion $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^n [a_\ell \cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x)] \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Zeigen Sie: Die Funktion f_n besitzt die Darstellung

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

mit *komplexen* Koeffizienten $c_{-n}, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie diese Koeffizienten.

- (b) Seien nun komplexe Zahlen $c_{-n}, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Wir betrachten die Funktion $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$g_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Wir nehmen an, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $c_0 \in \mathbb{R}$;
- (ii) $c_\ell = \overline{c_{-\ell}}$, für $\ell = 1, \dots, n$. D.h. c_ℓ ist die konjugiert komplexe Zahl zu $c_{-\ell}$.

Zeigen Sie: Dann ist g_n reell und besitzt eine Darstellung der Form (*) mit reellen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$.