

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Präsenzblatt 7 - Lösungen

Aufgabe 1. Gegeben seien die Funktionen

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 3}, \quad (2) \quad g(z) = \frac{1}{z^4 + 3iz^3 - 2z^2}.$$

- (a) Bestimmen Sie jeweils die isolierten Singularitäten der Funktionen und klassifizieren Sie diese.
- (b) Berechnen Sie die zugehörigen Residuen.
- (c) Geben Sie jeweils eine Partialbruchzerlegung an.
- (d) Berechnen Sie $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ und $\oint_{\Gamma} g(z) dz$ für $\Gamma = \partial B_2(i/2)$.

Lösung.

- (a) Es gilt

$$z^2 - 2z + 3 = (z - 1)^2 + 2 = 0 \quad z_{1,2}^f = 1 \pm \sqrt{2}i.$$

Bei z_1^f und z_2^f liegen jeweils einfache Polstellen von f .

Weiterhin:

$$z^4 + 3iz^3 - 2z^2 = z^2(z + i)(z + 2i) \quad z_0^g = 0, \quad z_1^g = -i, \quad z_2^g = -2i.$$

Bei z_0^g liegt ein zweifacher Pol von g , bei z_1^g, z_2^g jeweils einfache Pole.

- (b) Da bei z_1^f, z_2^f einfache Pole von f liegen, erhalten wir direkt:

$$\operatorname{Res}(f, 1 + \sqrt{2}i) = \lim_{z \rightarrow 1 + \sqrt{2}i} (z - (1 + \sqrt{2}i))f(z) = \frac{1}{z - (1 - \sqrt{2}i)} \Big|_{z=1+\sqrt{2}i} = \frac{1}{2\sqrt{2}i},$$

$$\operatorname{Res}(f, 1 - \sqrt{2}i) = \lim_{z \rightarrow 1 - \sqrt{2}i} (z - (1 - \sqrt{2}i))f(z) = \frac{1}{z - (1 + \sqrt{2}i)} \Big|_{z=1-\sqrt{2}i} = -\frac{1}{2\sqrt{2}i}.$$

Alternativ können wir die Residuen auch berechnen durch

$$\operatorname{Res}(f, 1 \pm \sqrt{2}i) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 3)'} \Big|_{1 \pm \sqrt{2}i} = \frac{1}{2z - 2} \Big|_{1 \pm \sqrt{2}i} = \frac{1}{\pm \sqrt{2}i}.$$

Für z_1^g, z_2^g erhalten wir analog:

$$\operatorname{Res}(g, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)g(z) = \frac{1}{z^2(z+2i)} \Big|_{z=-i} = -\frac{1}{i} = i,$$

$$\operatorname{Res}(g, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z+2i)g(z) = \frac{1}{z^2(z+i)} \Big|_{z=-2i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

Da $z_0^g = 0$ ein Pol der Ordnung $m = 2$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} z^2 g(z) \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2 + 3iz - 2} \right) \\ &= -\frac{2z + 3i}{(z^2 + 3iz - 2)^2} \Big|_{z=0} = -\frac{3}{4}i. \end{aligned}$$

(c) Da wir für f zwei einfache Pole haben, ergibt sich die Partialbruchzerlegung aus

$$\begin{aligned} f(z) &= h_f(z; 1 + \sqrt{2}i) + h_f(z; 1 - \sqrt{2}i) = \frac{\operatorname{Res}(f, 1 + \sqrt{2}i)}{z - (1 + \sqrt{2}i)} + \frac{\operatorname{Res}(f, 1 - \sqrt{2}i)}{z - (1 - \sqrt{2}i)} \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{z - (1 - \sqrt{2}i)} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{z - (1 + \sqrt{2}i)}. \end{aligned}$$

Für g erhalten wir

$$g(z) = h_g(z; 0) + h_g(z; -i) + h_g(z; -2i),$$

wobei sich die letzten beiden Terme wieder direkt aus den Residuen ergeben:

$$h_g(z; -i) = \frac{\operatorname{Res}(g, -i)}{z + i} = \frac{i}{z + i}, \quad h_g(z; -2i) = \frac{\operatorname{Res}(g, -2i)}{z + 2i} = -\frac{i}{4(z + 2i)}.$$

Für den verbleibenden Term sehen wir uns Taylor-Reihe von $\tilde{g}(z) = z^2 g(z)$ um $z_0 = 0$ an:

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{z^2 + 3iz - 2} = -\frac{1}{2} - \frac{3i}{4}z + \dots$$

Daraus ergibt sich die Laurent-Reihe von $g = \tilde{g}/z^2$:

$$g(z) = \underbrace{-\frac{1}{2z^2} - \frac{3i}{4z}}_{h_g(z, 0)} + \dots$$

Schließlich erhalten wir

$$g(z) = \frac{i}{z + i} - \frac{i}{4(z + 2i)} - \frac{1}{2z^2} - \frac{3i}{4z}.$$

(d) Für f liegt nur die Singularität $z_1^f = 1 + \sqrt{2}i$ innerhalb von $B_2(i/2)$. Damit

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, 1 + \sqrt{2}i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Für g liegen die Singularitäten $z_0^g = 0$ und $z_1^g = -i$ innerhalb von $B_2(i/2)$. Damit

$$\oint_{\Gamma} g(z) dz = 2\pi i \cdot (\operatorname{Res}(g, 0) + \operatorname{Res}(g, -i)) = 2\pi i \cdot \frac{i}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

Lösung. Die komplexe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$$

hat Singularitäten bei $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4} = \pm 2i$. Alle sind einfache Pole. Wir berechnen die Residuen für die Singularitäten mit positivem Imaginärteil:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \left. \frac{1}{(z + i)(z^2 + 4)} \right|_{z=i} = \frac{1}{6i}, \quad \operatorname{Res}(f, 2i) = \left. \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 2i)} \right|_{z=2i} = -\frac{1}{12i}.$$

Damit:

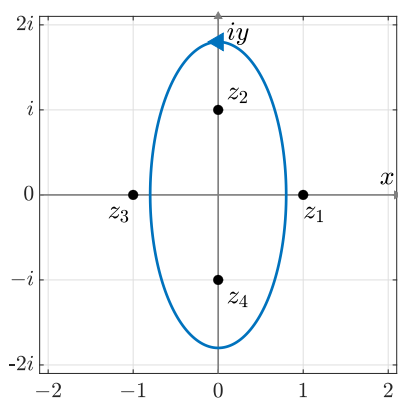
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 2i)) = \frac{\pi}{6}.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie

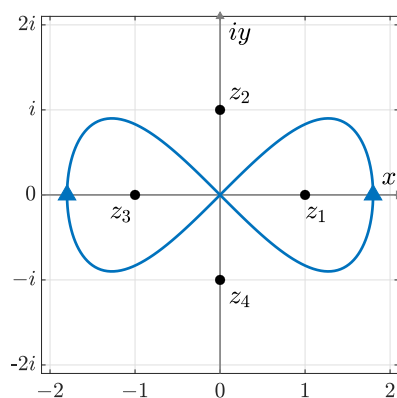
$$\int_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)} dz$$

für die abgebildeten Kurven Γ . Dabei zeigen die Pfeile die Umlaufrichtungen an und wir nehmen an, dass die Kurven jeweils einmal durchlaufen werden.

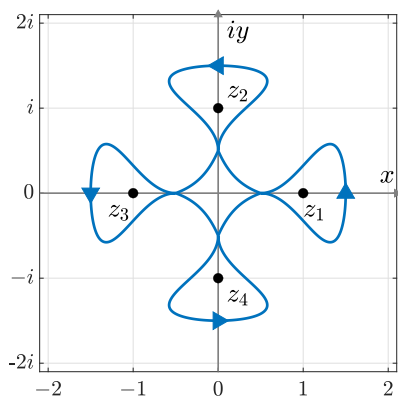
(a)



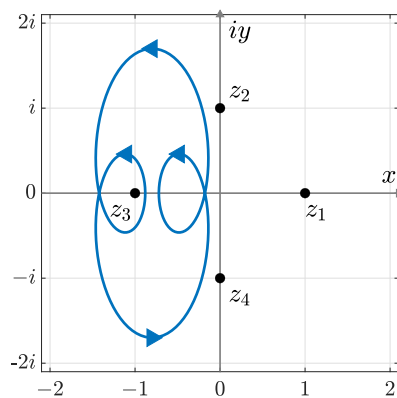
(b)



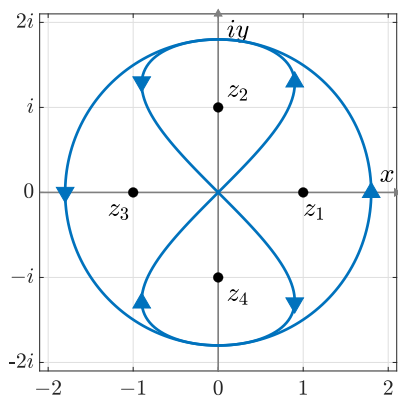
(c)



(d)



(e)



Lösung. Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)}$$

liegen bei

$$z_1 = 1, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = -i,$$

und sind jeweils einfache Polstellen. Die zugehörigen Residuen sind

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 1) &= \left. \frac{z^2}{(z^2+1)(z+1)} \right|_{z=1} = \frac{1}{4}, & \operatorname{Res}(f, i) &= \left. \frac{z^2}{(z+i)(z^2-1)} \right|_{z=i} = \frac{1}{4i}, \\ \operatorname{Res}(f, -1) &= \left. \frac{z^2}{(z^2+1)(z-1)} \right|_{z=-1} = -\frac{1}{4}, & \operatorname{Res}(f, -i) &= \left. \frac{z^2}{(z-i)(z^2-1)} \right|_{z=-i} = -\frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

(a) Die Kurve umläuft z_2 und z_4 einfach in positiver Richtung.

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-1)} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)) = 0.$$

(b) Die Kurve umläuft z_1 einfach in positiver Richtung und z_3 einfach in negativer Richtung.

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-1)} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 1) - \operatorname{Res}(f, -1)) = \pi i.$$

(c) Die Kurve umläuft alle Singularitäten einfach in positiver Richtung.

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-1)} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1) + \operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)) = 0.$$

(d) Die Kurve umläuft z_3 doppelt in positiver Richtung.

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-1)} dz = 2\pi i (2\operatorname{Res}(f, -1)) = -\pi i.$$

(e) Die Kurve umläuft z_1 und z_3 einfach in positiver Richtung, z_2 doppelt in positiver Richtung, sowie z_4 einmal in positiver und einmal in negativer Richtung.

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-1)} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1) + 2\operatorname{Res}(f, i) + 0 \cdot \operatorname{Res}(f, -i)) = \pi.$$