Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 6

Aufgabe 1. (*alte Klausuraufgabe, 7 Punkte*) Gegeben sei die Funktionsvorschrift

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-2)^2(z+3)}$$

(a) Wie viele verschiedene Laurent-Reihen gibt es zu f bei Entwicklung um den Punkt $z_0 = 2$? Geben Sie jeweils die Ringe an, in den die Laurent-Reihen gegen f konvergieren.

(b) Berechnen Sie für jeden der Ringe aus Teil (a) diejenige Laurent-Entwicklung von f, die in dem jeweiligen Ring gegen f konvergiert.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils den Koeffizienten c_{-1} der Reihe an:

(a) $f(z) = \dfrac{\exp(z-2)}{z-2}$ im Punkt $z_0 = 2$,

(b) $f(z) = (z+1)^3 \cosh\left(\dfrac{1}{z+1}\right)$ im Punkt $z_0 = -1$.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine (kurze) Begründung an.

(a) Seien f, g analytische Funktionen auf $\mathbb{C}$. Falls es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Sei f eine analytische Funktion auf $\mathbb{C}$. Falls es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n > m$, so ist f ein Polynom vom Grad höchstens m.

(c) Sei f analytisch auf einer offenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0. Falls die zugehörige Taylor-Reihe zum Entwicklungspunkt z_0 in einem Punkt z_* auf dem Rand der Kreisscheibe divergiert, so liegt bei z_* eine Singularität von f.

Bearbeitungstermine: 30. Juni 2025 - 04. Juli 2025