Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 5 - Lösungen

Aufgabe 1. Gegeben seien die Kurven

$$\Gamma_1 \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; z \;=\; t \cdot (1+\mathrm{i}), \quad t \in [0,1]\}\,,$$

$$\Gamma_2 \;=\; \left\{z \in \mathbb{C} \;\mid\; z \;=\; t^2 + \mathrm{i} \cdot t, \quad t \in [0,1]\right\}\,,$$

$$\Gamma_3 \;=\; \left\{z \in \mathbb{C} \;\mid\; z \;=\; \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot (1+\mathrm{i}), \quad t \in [-1,1]\right\}.$$

Berechnen Sie für

$$f(z) = z, \qquad \text{und} \qquad g(z) = 2\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z),$$

jeweils

$$\int_{\Gamma_j} f(z)\;\mathrm{d}z, \qquad \int_{\Gamma_j} g(z)\;\mathrm{d}z, \qquad \text{für} \;\; j = 1, 2, 3.$$

Lösung. Wir parametrisieren die Kurven jeweils durch

$$c_1(t) = t \cdot (1+\mathrm{i}), \qquad c_2(t) = t^2 + \mathrm{i} \cdot t, \qquad c_3(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot (1+\mathrm{i}).$$

Die Funktion f ist auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C}$ analytisch. Nach dem Cauchyschen Integralsatz sind dann die Kurvenintegrale von f wegunabhängig und hängen nur von den Endpunkten ab. Da $F(z) = z^2/2$ eine Stammfunktion von f ist, erhalten wir

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\;\mathrm{d}z \;=\; F(c_1(1)) - F(c_1(0)) \;=\; \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2 - 0 \;=\; \mathrm{i}.$$

Da Γ_1 und Γ_2 die gleichen Endpunkte haben ($c_1(0) = c_2(0)$ und $c_1(1) = c_2(1)$), folgt

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\;\mathrm{d}z \;=\; \int_{\Gamma_1} f(z)\;\mathrm{d}z \;=\; \mathrm{i}.$$

Da Γ_3 eine geschlossene Kurve ist ($c_3(-1) = c_3(1)$), folgt ebenfalls aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$\int_{\Gamma_3} f(z)\;\mathrm{d}z = 0.$$

Die Funktion g ist nicht analytisch, d.h. hier müssen wir tatsächlich ein wenig rechnen. Wir berechnen

$$\int_{\Gamma_1} g(z)\ \mathrm{d}z \ = \ \int_0^1 t\cdot(1+\mathrm{i})\ \mathrm{d}t \ = \ \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}).$$

Für c_2 gilt $c_2'(t) = 2t+\mathrm{i}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} g(z)\ \mathrm{d}z \ &= \ \int_0^1 (2\mathrm{Re}(c_2(t)) - \mathrm{Im}(c_2(t)) + 1)\cdot c_2'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \ \int_0^1 (2t^2-t)\cdot(2t+\mathrm{i})\ \mathrm{d}t \ = \ \int_0^1 (4t^3-2t^2) + \mathrm{i}\cdot(2t^2-t)\ \mathrm{d}t \\ &= \ \left(t^4 - \frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \ + \ \mathrm{i}\cdot\left(\frac{2t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \ = \ \frac{1}{3} + \mathrm{i}\cdot\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Schließlich ist $c_3'(t) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)(1+\mathrm{i})$ und

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} g(z)\ \mathrm{d}z \ &= \ \int_{-1}^1 (2\mathrm{Re}(c_3(t)) - \mathrm{Im}(c_3(t)))\cdot c_2'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \ -\frac{\pi}{2}(1+\mathrm{i})\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ \mathrm{d}t \ = \ -\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Bigg|_{-1}^1 \ = \ 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Seien $a, b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$, gegeben, sowie Γ die Verbindungsgerade zwischen a und b,

$$\Gamma = \{z = (1-t)a + tb \ \in\mathbb{C} \ \mid \ t\in[0,1]\}.$$

Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale

(a) $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z$, (b) $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{e}^{\overline{z}}\ \mathrm{d}z$, (c) $\displaystyle\int_\Gamma |\mathrm{e}^z|\ \mathrm{d}z$.

Lösung.

(a) Da $f_1(z) = \mathrm{e}^z$ analytisch ist mit Stammfunktion $F_1(z) = e^z$, erhalten wir

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z \ = \ \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a.$$

(b) Da $f_2(z) = \mathrm{e}^{\overline{z}}$ nicht analytisch ist, müssen wir das Integral direkt berechnen: Mit $c(t) = (1-t)a + tb$, $c'(t) = b-a$ gilt

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathrm{e}^{\overline{z}}\ \mathrm{d}z \ &= \ \int_0^1 e^{(1-t)\overline{a}+t\overline{b}}\cdot(b-a)\ \mathrm{d}t \ = \ (b-a)\mathrm{e}^{\overline{a}}\int_0^1 \mathrm{e}^{t(\overline{b}-\overline{a})}\ \mathrm{d}t \\ &= \ \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}\mathrm{e}^{\overline{a}}\left(\mathrm{e}^{\overline{b}-\overline{a}} - 1\right) \ = \ \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}\left(\mathrm{e}^{\overline{b}} - \mathrm{e}^{\overline{a}}\right)\end{aligned}$$

(c) Wir haben ein reelles integral! Wegen $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ folgt

$$\begin{aligned}\int_\Gamma |\mathrm{e}^z| \; \mathrm{d}z &= \int_0^1 \exp\left((1-t)\mathrm{Re}(a) + t\mathrm{Re}(b)\right) \cdot (b-a) \; \mathrm{d}t \\ &= (b-a)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(a)} \int_0^1 \mathrm{e}^{t(\mathrm{Re}(b)-\mathrm{Re}(a))} \; \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Falls $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(b)$, so ist das letzte Integral oben gleich Eins und wir erhalten $\int_\Gamma |\mathrm{e}^z| \; \mathrm{d}z = (b-a)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(a)}$. Andernfalls gilt

$$\int_\Gamma |\mathrm{e}^z| \; \mathrm{d}z = (b-a)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(a)} \left[\frac{\mathrm{e}^{t(\mathrm{Re}(b)-\mathrm{Re}(a))}}{\mathrm{Re}(b)-\mathrm{Re}(a)}\right]_0^1 = (b-a)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(b)} - \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(a)}}{\mathrm{Re}(b)-\mathrm{Re}(a)}.$$

Aufgabe 3. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ sei

$$\partial B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

der positiv orientierte Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius R.

Berechnen Sie die folgenden komplexen Kurvenintegrale:

(a) $$\oint_{\partial B_1(0)} \frac{\cos(z)}{z} \; \mathrm{d}z,$$

(b) $$\oint_K \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-2)} \; \mathrm{d}z,$$

jeweils für (i) $K = \partial B_{3/2}(0)$, (ii) $K = \partial B_2(3)$, (iii) $K = \partial B_{1/2}(0)$.

(c) $$\oint_{\partial B_3(0)} \left(\frac{z}{z-2\mathrm{i}}\right)^3 \; \mathrm{d}z.$$

Lösung.

(a) Die Funktion cos ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und $\partial B_1(0)$ ist eine einfach geschlossene Kurve, die $z_0 = 0$ umläuft. Nach der Cauchy-Integralformel gilt dann

$$\oint_{\partial B_1(0)} \frac{\cos(z)}{z} = 2\pi\mathrm{i}\cos(0) = 2\pi\mathrm{i}.$$

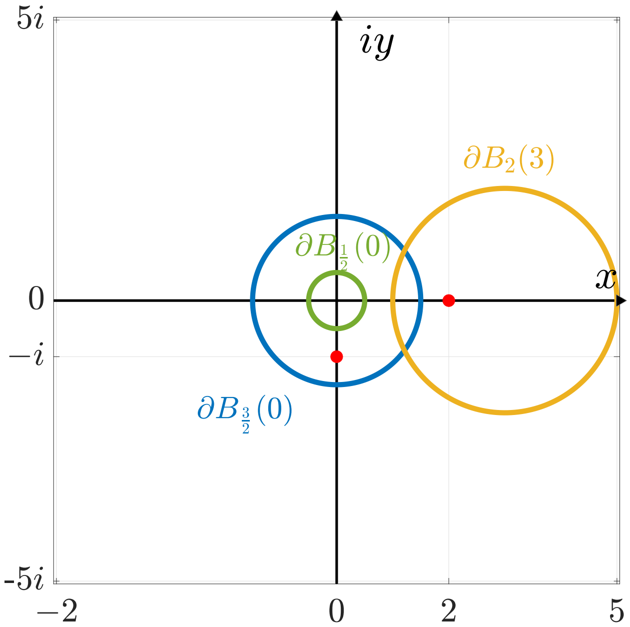
(b) (i) Der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $3/2$ umläuft den Punkt $-\mathrm{i}$, aber nicht den Punkt 2. Im Inneren dieses Kreises (ein einfach zusammenhängendes Gebiet) ist die Funktion $g(z) = 1/(z-2)$ analytisch und wir erhalten aus der Cauchy-Integralformel:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial B_{3/2}(0)} \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-2)} \; \mathrm{d}z &= \oint_{\partial B_{3/2}(0)} \frac{g(z)}{(z+\mathrm{i})} \; \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}g(-\mathrm{i}) \\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{-\mathrm{i}-2} = \frac{2\pi}{5}\mathrm{i}(\mathrm{i}-2) = -\frac{2\pi}{5}(1+2\mathrm{i}).\end{aligned}$$

(ii) Analog zu Teil (i): Der Kreis mit Mittelpunkt 3 und Radius 2 umläuft den Punkt 2, aber nicht den Punkt $-\mathrm{i}$. Wir betrachten die Funktion $h(z) = 1/(z+\mathrm{i})$ und erhalten aus der Cauchy-Integralformel:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial B_2(3)} \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-2)}\,\mathrm{d}z &= \oint_{\partial B_2(3)} \frac{h(z)}{(z-2)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}h(2) \\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{2\pi}{5}\mathrm{i}(2-\mathrm{i}) = \frac{2\pi}{5}(1+2\mathrm{i}).\end{aligned}$$

(iii) In jeder offenen Kreisscheibe, die weder den Punkt 2 noch den Punkt $-\mathrm{i}$ enthält, ist $f(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-2)}$ analytisch, z.b. im Inneren der Kreisscheibe mit Mittelpunkt 0 und Radius $3/4$. Darin ist $\partial B_{1/2}(0)$ eine geschlossene Kurve und somit verschwindet das Kurvenintegral von f entlang $\partial B_{1/2}(0)$.



(c) Die Funktion $f(z) = z^3$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Der Kreis $\partial B_3(0)$ umläuft den Punkt $2\mathrm{i}$ und somit ergibt sich aus der Cauchy-Integralformel für Ableitungen:

$$\oint_{\partial B_3(0)} \frac{z^3}{(z-2\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}f''(2\mathrm{i}) = \pi\mathrm{i}\cdot 6\cdot 2\mathrm{i} = -12\pi.$$