

## Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Präsenzblatt 5 - Lösungen

**Aufgabe 1.** Gegeben seien die Kurven

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t \cdot (1 + i), \quad t \in [0, 1]\},$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t^2 + i \cdot t, \quad t \in [0, 1]\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot (1 + i), \quad t \in [-1, 1]\right\}.$$

Berechnen Sie für

$$f(z) = z, \quad \text{und} \quad g(z) = 2\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z),$$

jeweils

$$\int_{\Gamma_j} f(z) \, dz, \quad \int_{\Gamma_j} g(z) \, dz, \quad \text{für } j = 1, 2, 3.$$

**Aufgabe 2.** Seien  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$ , gegeben, sowie  $\Gamma$  die Verbindungsgerade zwischen  $a$  und  $b$ ,

$$\Gamma = \{z = (1 - t)a + tb \in \mathbb{C} \mid t \in [0, 1]\}.$$

Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale

$$(a) \int_{\Gamma} e^z \, dz, \quad (b) \int_{\Gamma} e^{\bar{z}} \, dz, \quad (c) \int_{\Gamma} |e^z| \, dz.$$

**Aufgabe 3.** Für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $R > 0$  sei

$$\partial B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

der positiv orientierte Kreis mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $R$ .

Berechnen Sie die folgenden komplexen Kurvenintegrale:

(a)  $\oint_{\partial B_1(0)} \frac{\cos(z)}{z} dz,$

(b)  $\oint_K \frac{1}{(z+i)(z-2)} dz,$

jeweils für (i)  $K = \partial B_{3/2}(0)$ , (ii)  $K = \partial B_2(3)$ , (iii)  $K = \partial B_{1/2}(0)$ .

(c)  $\oint_{\partial B_3(0)} \left( \frac{z}{z-2i} \right)^3 dz.$