Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 4 - Lösungen

Aufgabe 1. In welchen Punkten $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Funktionen jeweils komplex differenzierbar? Bestimmen Sie jeweils die Ableitungen in diesen Punkten.

(a) $f_1(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$,

(b) $f_2(z) = \sin(x)\,(\mathrm{e}^y + e^{-y}) + \mathrm{i}\cos(x)\,(\mathrm{e}^y - e^{-y})$,

(c) $f_3(z) \;=\; \overline{z}(2 - |z|^2)$.

Lösung.

(a) Es gilt für $z = x + \mathrm{i}y$:

$$f_1(z) \;=\; (x + \mathrm{i}y)\mathrm{e}^x \;=\; \underbrace{x\mathrm{e}^x}_{=:\,u} + \mathrm{i}\cdot\underbrace{(y\mathrm{e}^x)}_{=:\,v}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= (1+x)\mathrm{e}^x, & u_y(x,y) &= 0\\ v_x(x,y) &= y\mathrm{e}^x, & v_y(x,y) &= \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Um die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen zu erfüllen muss also gelten:

$$u_x \overset{!}{=} v_y \qquad \Rightarrow \qquad (1+x)\mathrm{e}^x \overset{!}{=} \mathrm{e}^x \qquad \Rightarrow \qquad x = 0,$$

sowie

$$u_y \overset{!}{=} -v_x \qquad \Rightarrow \qquad 0 \overset{!}{=} y\mathrm{e}^x \qquad \Rightarrow \qquad y = 0.$$

Also ist f_1 nur in $z = 0$ differenzierbar. Dort gilt

$$f_1'(0) \;=\; u_x(0,0) + \mathrm{i}\cdot v_x(0,0) \;=\; 1 + \mathrm{i}\cdot 0 \;=\; 1.$$

(b) Mit $u(x,y) \;=\; \sin(x)\,(\mathrm{e}^y + e^{-y})$ und $v(x,y) \;=\; \cos(x)\,(\mathrm{e}^y - e^{-y})$ gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \cos(x)\,(\mathrm{e}^y + e^{-y})\,, & u_y(x,y) &= \sin(x)\,(\mathrm{e}^y - e^{-y})\\ v_x(x,y) &= -\sin(x)\,(\mathrm{e}^y - e^{-y})\,, & v_y(x,y) &= \cos(x)\,(\mathrm{e}^y + e^{-y})\,. \end{aligned}$$

Also sind die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen überall erfüllt und f_2 ist überall differenzierbar. Es gilt (vgl. HA 3, Aufgabe 1):

$$f_2'(z) \;=\; \cos(x)\left(\mathrm{e}^y + e^{-y}\right) - \mathrm{i}\sin(x)\left(\mathrm{e}^y - e^{-y}\right) \;=\; 2\cos(z).$$

Tatsächlich ist $f_2(z) = 2\sin(z)$.

(c) $f_3(z) \;=\; \overline{z}(2-|z|^2) \;=\; (x-\mathrm{i}y)(2-x^2-y^2) \;=\; \underbrace{(2x-x^3-xy^2)}_{=:\,u} + \mathrm{i}\cdot\underbrace{(yx^2+y^3-2y)}_{=:\,v}.$

Damit gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 2-3x^2-y^2, \qquad & u_y(x,y) &= -2xy \\ v_x(x,y) &= 2xy, & v_y(x,y) &= x^2+3y^2-2. \end{aligned}$$

Es gilt also $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Die Bedingung $u_x = v_y$ führt zu

$$2-3x^2-y^2 \overset{!}{=} x^2+3y^2-2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2=1,$$

d.h. f ist nur auf dem Einheitskreis $S=\{z\in\mathbb{C} \;|\; |z|=1\}$ differenzierbar. Für $z=x+\mathrm{i}y\in S$ gilt:

$$\begin{aligned} f_3'(z) \;&=\; u_x(x,y)+\mathrm{i}\cdot v_x(x,y) \;=\; (2-3x^2-y^2) \;+\; \mathrm{i}\cdot 2xy \\ &\overset{1=x^2+y^2}{=} \; -x^2+y^2+2\mathrm{i}xy \;=\; -(\overline{z})^2, \qquad \text{für} \quad |z|=1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Zu welchen der folgenden Funktionen existiert auf $\mathbb{C}$ eine konjugiert harmonische Funktion v? D.h. eine auf $\mathbb{C}$ harmonische Funktion v, sodass $f=u+\mathrm{i}v$ auf $\mathbb{C}$ analytisch ist? Bestimmen Sie im Falle der Existenz ein derartiges v.

(a) $u(x,y) = 2x^2-3xy+y^2$.

(b) $u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos(y)$.

Lösung.

(a) Es gilt

$$\Delta u(x,y) \;=\; u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y) \;=\; 6 \;\neq\; 0,$$

also existiert keine konjugiert harmonisches v.

(b) Wir haben

$$\begin{aligned} u_x(x,y) \;&=\; -\mathrm{e}^{-x}\cos(y), \qquad & u_{xx}(x,y) \;&=\; \mathrm{e}^{-x}\cos(x), \\ u_y(x,y) \;&=\; -\mathrm{e}^{-x}\sin(y), & u_{yy}(x,y) \;&=\; -\mathrm{e}^{-x}\cos(x), \end{aligned}$$

und somit $\Delta u(x,y) \;=\; u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y) \;=\; 0$. Also existiert ein konjugiert harmonisches v. Dieses finden wir über die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$u_x(x,y) \;=\; -\mathrm{e}^{-x}\cos(y) \overset{!}{=} v_y(x,y) \quad\Rightarrow\quad v(x,y) \;=\; -\mathrm{e}^{-x}\sin(y)+k(x).$$

Damit:

$$u_y(x,y) \;=\; -\mathrm{e}^{-x}\sin(y) \overset{!}{=} -v_x(x,y) \;=\; -\mathrm{e}^{-x}\sin(y)+k'(x) \quad\Rightarrow\quad k'(x) \;=\; 0.$$

Also ist $k(x)=c,\; c\in\mathbb{R}$ und somit ist $v(x,y)=-\mathrm{e}^{-x}\sin(y)+c$.

Für $c=0$ erhalten wir

$$f(z) \;=\; \mathrm{e}^{-x}\cos(y)-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-x}\sin(y) \;=\; \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} \;=\; \mathrm{e}^{-z}.$$

Wenn man schon gleich gesehen hat, dass $u(x,y)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-z})$, und argumentiert, dass e^{-z} holomorph ist, kann man auch sofort $v(x,y)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{-z})$ wählen.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Transformationen sind mithilfe von Möbius-Transformationen möglich?

Hinweis: Sie brauchen keine konkreten Transformationen angeben.

(a) Gegeben seien die Kreisscheiben

$$K_1 \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z+1| \leq 1\}, \qquad K_2 \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z-1| \leq 1\}.$$

Kann das *Äußere der beiden Kreisscheiben*, $M = \mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)$, auf das *Innere eines Rings*,

$$D \;=\; \{w \in \mathbb{C} \;\mid\; a < |w| < b\}, \qquad \text{für gegebene} \quad 0 < a < b,$$

durch eine Möbius-Transformation abgebildet werden?

(b) Gegeben sei der *obere rechte Quadrant*,

$$Q \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; \mathrm{Re}(z) \geq 0, \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0\}.$$

Kann Q durch eine Möbius-Transformation auf einen *Sektor* der Form

$$S \;=\; \{w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} \;\mid\; r \geq 0, \quad \varphi \in [a,b]\}, \qquad \text{für gegebene} \quad 0 < a < b < \frac{\pi}{2},$$

transformiert werden?

(c) *(Für ambitionierte Studierende der komplexen Funktionen)*

Kann die *linke Halbebene*,

$$H \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; \mathrm{Re}(z) < 0\}$$

durch eine Möbius-Transformation auf das *Innere der Kreisscheibe* $K = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-1| < R\}$ mit einem geeigneten Radius $R > 0$ abgebildet werden?

Lösung.

(a) Das ist *nicht* möglich. Hierfür müsste zunächst einer der Kreise $|z+1| = 1$, $|z-1| = 1$ auf den Kreis $|w| = a$, und der andere auf den den Kreis $|w| = b$ abgebildet werden. Die beiden ursprünglichen Kreise schneiden sich aber in $z = 0$, während die Bildkreise keinen Schnittpunkt haben.

(b) Das ist *nicht* möglich. Hierfür müsste die reelle Achse auf eine der beiden Geraden

$$G_1 = \{w \in \mathbb{C} \;\mid\; w = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{oder} \qquad G_2 = \{w \in \mathbb{C} \;\mid\; w = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

abgebildet werden, und die imaginäre Achse auf die jeweils andere. Da die beiden Achsen symmetrisch zueinander sind, müssten auch ihre Bilder symmetrisch zueinander sein, d.h. die Bildgeraden müssten senkrecht aufeinander stehen. Die Bildgeraden schneiden sich aber im Winkel $0 < b - a < \pi/2$.

Man kann, anstatt über die Symmetrieerhaltung zu argumentieren, auch verwenden, dass Möbius-Transformation konforme Abbildungen sind (vgl. HA 4.1(a)). Hier muss man aber noch ein weiteres Detail beachten: Die Achsen schneiden sich in 0, die Bildgeraden auch. Eine Möglichkeit wäre also, dass $T(0) = 0$ gilt. In diesem Fall müsste aufgrund der Konformität der Winkel in 0 erhalten bleiben und wir sehen, dass wir keinen Schnittwinkel kleiner als $\pi/2$ erhalten können.

Die andere Möglichkeit wäre, dass der Schnittpunkt bei ∞ auf den Schnittpunkt der Bildgeraden abgebildet wird, d.h. $T(\infty) = 0$ und $T(0) = \infty$. Da wir bei ∞ nicht definieren können, was der Winkel ist, kann man hier nicht über Winkelerhaltung argumentieren. Aber in diesem Fall müsste T die Form $T(z) = b/z$ haben. Da $z \mapsto 1/z$ die Achsen auf sich selbst abbildet und Multiplikation mit b um einen festen Winkel dreht, können wir also auch in diesem Fall keine Bildgeraden erhalten, die sich in einem Winkel kleiner als $\pi/2$ schneiden.

(c) Das ist möglich. Zunächst müssen wir die imaginäre Achse auf einen Kreis abbilden, was erfüllt ist für $-d/c \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$. Um die linke Halbebene ins das Innere der Kreisscheibe abzubilden, genügt es, das Bild eines Punkte aus H in K festzulegen. Wir können z.B. $T(-1) = 1$ fordern. Damit wird $z_1 = -1$ auf den Mittelpunkt $w_1 = 1$ abgebildet. Dann muss der zu z_1 bzgl. $\mathrm{i}\mathbb{R}$ symmetrische Punkt $z_2 = 1$ auf den unendlich fernen Punkt abgebildet werden, d.h. $T(1) = \infty$. Wir können also $c = 1, d = -1$ wählen und $T(\mathrm{i}\mathbb{R})$ ist ein echter Kreis mit Mittelpunkt eins.

Es fehlt noch eine dritte Bedingung, um die Möbius-Transformation festzulegen. Tatsächlich können wir diese benutzen, um den Radius R zu kontrollieren, indem wir $T(\mathrm{i}y)$ für ein $y \in \mathbb{R}$ festlegen. Z.B: liefert $T(0) = 0$ den Radius $R = 1$.