Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Präsenzblatt 4

Aufgabe 1. In welchen Punkten $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Funktionen jeweils komplex differenzierbar? Bestimmen Sie jeweils die Ableitungen in diesen Punkten.

- (a) $f_1(z) = ze^{\operatorname{Re}(z)}$,
- (b) $f_2(z) = \sin(x)(e^y + e^{-y}) + i \cos(x)(e^y - e^{-y})$,
- (c) $f_3(z) = \bar{z}(2 - |z|^2)$.

Aufgabe 2. Zu welchen der folgenden Funktionen existiert auf $\mathbb{C}$ eine konjugiert harmonische Funktion v ? D.h. eine auf $\mathbb{C}$ harmonische Funktion v , sodass $f = u + iv$ auf $\mathbb{C}$ analytisch ist? Bestimmen Sie im Falle der Existenz ein derartiges v .

- (a) $u(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$.
- (b) $u(x, y) = e^{-x} \cos(y)$.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Transformationen sind mithilfe von Möbius-Transformationen möglich?

Hinweis: Sie brauchen keine konkreten Transformationen angeben.

- (a) Gegeben seien die Kreisscheiben

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| \leq 1\}, \quad K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1\}.$$

Kann das *Äußere der beiden Kreisscheiben*, $M = \mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)$, auf das *Innere eines Rings*,

$$D = \{w \in \mathbb{C} \mid a < |w| < b\}, \quad \text{für gegebene } 0 < a < b,$$

durch eine Möbius-Transformation abgebildet werden?

- (b) Gegeben sei der *obere rechte Quadrant*,

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}.$$

Kann Q durch eine Möbius-Transformation auf einen *Sektor* der Form

$$S = \{w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \geq 0, \varphi \in [a, b]\}, \quad \text{für gegebene } 0 < a < b < \frac{\pi}{2},$$

transformiert werden?

(c) (Für ambitionierte Studierende der komplexen Funktionen)

Kann die *linke Halbebene*,

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$$

durch eine Möbius-Transformation auf das *Innere der Kreisscheibe*

$K = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - 1| < R\}$ mit einem geeigneten Radius $R > 0$ abgebildet werden?