

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Präsenzblatt 3 - Lösungen

Aufgabe 1. Berechnen Sie den *natürlichen Logarithmus* der folgenden komplexen Zahlen und geben Sie jeweils den *Hauptwert* an.

$$(a) \quad z_1 = -\sqrt{3} + i, \quad (b) \quad z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad (c) \quad z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)^4.$$

Berechnen Sie $\left\{4\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)\right\}$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Teil (c).

Lösung.

(a) Wir haben

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Somit ist $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ und

$$\{\operatorname{Log}(z_1)\} = \left\{\log(2) + i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

Hauptwert: $w_1 = \log(2) + i\frac{5\pi}{6}$.

(b) Die Zahl liegt schon in Polarform vor, aber das Argument liegt nicht in $(-\pi, \pi)$. Wir können schreiben

$$z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}} = 3e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}.$$

und damit

$$\{\operatorname{Log}(z_2)\} = \left\{\log(3) + i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Hauptwert: $w_2 = \log(3) + i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$.

(c) Wir berechnen zunächst

$$v := \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \Rightarrow |v| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

und

$$\varphi = \arctan\left(\frac{3/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Somit ist

$$v = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z_3 = v^4 = (\sqrt{3})^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 9e^{i(-\frac{2\pi}{3})}.$$

Daraus erhalten wir

$$\{\text{Log}(z_3)\} = \left\{ \log(9) + i \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Hauptwert: $w_3 = \log(9) + i \left(-\frac{2}{3}\pi \right)$.

Falls wir in Anlehnung an die Rechenregeln im Reellen ($\log(a^n) = n \log(a)$) einfach versuchen $4\text{Log}(v)$ zu berechnen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \{4\text{Log}(v)\} &= \left\{ 4\log(\sqrt{3}) + 4i \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \log(9) + i \left(\frac{4\pi}{3} + 8k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Es gilt also $\{4\text{Log}(v)\} \subset \{\text{Log}(v^4)\}$, aber die Mengen sind nicht gleich!

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation

$$T: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

mit

$$T(-3) = 0, \quad T(1) = \infty, \quad T(-i) = 1 - 2i.$$

(b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden Mengen unter T :

- (i) M_1 : reelle Achse;
- (ii) M_2 : Kreis mit Mittelpunkt $1 - i$ und Radius 1.
- (iii) M_3 : Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 3;

Lösung.

(a) Da wir bereits eine Nullstelle und eine Polstelle kennen, können wir ansetzen:

$$T(z) = \alpha \frac{z + 3}{z - 1}.$$

Das α erhalten wir aus der dritten Bedingung:

$$T(-i) = \alpha \frac{-i + 3}{-i - 1} = \alpha \frac{(i - 3)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \alpha(2i - 1) \stackrel{!}{=} 1 - 2i \Rightarrow \alpha = -1,$$

$$\text{also } T(z) = \frac{z + 3}{1 - z}.$$

- (b) (i) Da $-d/c = 1 \in \mathbb{R}$, wird $\mathbb{R}$ durch T auf eine Gerade abgebildet. Da alle Koeffizienten von T reell sind, sind die Bilder reeller Zahlen reell. Also ist $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- (ii) Da $1 \in M_2$, wird M_2 durch T auf eine Gerade abgebildet. Wir können also zwei Punkte aus M_2 in T einsetzen und die zugehörige Bildgerade bestimmen. Wir wissen schon, dass für $-i \in M_2$ gilt: $T(-i) = 1 - 2i$. Für $2 - i \in M_2$ erhalten wir:

$$T(2 - i) = \frac{5 - i}{i - 1} = \frac{(5 - i)(i + 1)}{-2} = -\frac{6 + 4i}{2} = -3 - 2i.$$

Wir erhalten also die Gerade $T(M_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = -2\}$.

- (iii) Da $1 \notin M_3$, wird M_3 durch T auf einen echten Kreis abgebildet. Da M_3 symmetrisch zu $\mathbb{R}$ ist und eine Möbius-Transformation diese Symmetrie erhält, muss $T(M_3)$ symmetrisch zu $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ sein. Also ist $T(M_3)$ ein Kreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse. Der Bildkreis hat also zwei Schnittpunkte mit der reellen Achse und der Mittelpunkt liegt in der Mitte zwischen diesen Schnittpunkten.

Wegen

$$T(-3) = \frac{-3 + 3}{1 + 3} = 0 \in \mathbb{R}, \quad T(3) = \frac{3 + 3}{1 - 3} = -3 \in \mathbb{R},$$

können wir also schließen, dass der Mittelpunkt bei

$z_0 = (0 + (-3))/2 = -3/2$ liegt und der Radius $3/2$ ist, d.h.

$$T(M_3) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3/2| = 3/2\}.$$

Aufgabe 3. Gegeben sei die Möbius-Transformation $T(z) = \frac{i(z - 1 - i)}{z + 2 - i}$, sowie der Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - i| = 2\}$.

Bestimmen Sie das Bild von K unter T .

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die Punkte $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -2 + i$ auf Symmetrie bzgl. K .

Lösung. Der Kreis K hat den Mittelpunkt $z_0 = 2 + i$ und den Radius $R = 2$. Damit ist

$$(z_1 - z_0) \cdot (\overline{z_2} - \overline{z_0}) = (1 + i - (2 + i)) \cdot (-2 - i - (2 - i)) = -1 \cdot (-4) = 4 = R^2,$$

also sind z_1 und z_2 zueinander symmetrisch bzgl. K .

Da T diese Symmetrie erhält, müssen $T(z_1)$ und $T(z_2)$ symmetrisch bzgl. $T(K)$ sein. Aus $(-2 + i) \notin K$ folgt, dass $T(K)$ ein echter Kreis ist. Wir haben $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$, wobei $z_1, z_2 \notin K$. Weil 0 und ∞ symmetrisch bzgl. des Kreises $T(K)$ sind, und ∞ symmetrisch zum Mittelpunkt ist, muss 0 der Mittelpunkt des Kreises sein.

Wegen $i \in K$ ist der Radius R von $T(K)$ gegeben durch $|T(i)|$. Es gilt

$$T(i) = \frac{i(i - 1 - i)}{i + 2 - i} = \frac{-i}{2} \Rightarrow R = |T(i)| = \frac{1}{2}.$$

Also:

$$T(K) = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid |w| = \frac{1}{2} \right\}.$$