

## Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Präsenzblatt 3

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie den *natürlichen Logarithmus* der folgenden komplexen Zahlen und geben Sie jeweils den *Hauptwert* an.

$$(a) \quad z_1 = -\sqrt{3} + i, \quad (b) \quad z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad (c) \quad z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)^4.$$

Berechnen Sie  $\left\{4\operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)\right\}$  und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Teil (c).

**Aufgabe 2.**

(a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation

$$T: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

mit

$$T(-3) = 0, \quad T(1) = \infty, \quad T(-i) = 1 - 2i.$$

(b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden Mengen unter  $T$ :

- (i)  $M_1$ : reelle Achse;
- (ii)  $M_2$ : Kreis mit Mittelpunkt  $1 - i$  und Radius 1.
- (iii)  $M_3$ : Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 3;

**Aufgabe 3.** Gegeben sei die Möbius-Transformation  $T(z) = \frac{i(z - 1 - i)}{z + 2 - i}$ ,  
sowie der Kreis  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - i| = 2\}$ .

Bestimmen Sie das Bild von  $K$  unter  $T$ .

*Hinweis:* Untersuchen Sie zunächst die Punkte  $z_1 = 1 + i$  und  $z_2 = -2 + i$  auf Symmetrie bzgl.  $K$ .